Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Matemáticas

Geometrías con carácter topológico

David F. Martínez Torres

Memoria para optar al título de
doctor en ciencias matemáticas
Director: Alberto Ibort Latre

Leganés, abril de 2003

Tesis: "Geometrías con carácter topológico".
Autor: David F. Martínez Torres.
Director: Alberto Ibort Latre.
Universidad Carlos de Madrid, Departamento de Matemáticas, Área de álgebra lineal numérica y sus aplicaciones.
Código Unesco: 1204.04 (Geometría diferencial), 1204.02 (Geometría de variedades complejas), 1204.99 (Geometría simpléctica).

Breve resumen: En esta tesis se han estudiado tres problemas para determinadas geometrías cuyo estudio --debido por ejemplo a la ausencia de invariantes locales—esta intimamente relacionado con la topología de la variedad ambiente. El primer problema es la riqueza de la geometría, entendida como la existencia de construcciones compatibles de geometría diferencial. Hemos introducido la noción de variedades 2-calibradas, una generalización impar de la geometría simpléctica, y demostrado la existencia de sistemas lineales genéricos compatibles con la estructura mediante el desarrollo de técnicas de geometría aproximadamente holomorfa. La segunda cuestión ha sido las posibles obstrucciones topológicas a la existencia de estructuras de Poisson regulares en variedades compactas. En este sentido se ha dado un método de construcción de variedades de Poisson regulares con grupo fundamental arbitrario, demostrándose que este no obstruye la existencia de tales estructuras. La última cuestión abordada ha sido la de la clasificación, que se ha obtenido para estructuras de Nambu genéricas en variedades compactas orientadas.

A la memoria de mi padre

Índice

Agradecimientos

Quisiera expresar mi más profundo agradecemiento a Alberto Ibort, mi director de tesis, por el apoyo constante que durante estos años me ha brindado, por haber compartido conmigo su inagotable caudal de conocimientos y por sus numerosos consejos. Su visión global y profunda de las matemáticas y su entusiasmo por la investigación son fuente constante de inspiración para mí.

Parte de esta memoria se inició como un trabajo conjunto con Alberto Ibort y Fran Presas, a quienes agradezco su generosidad. En este sentido también estoy en deuda con R. L. Fernandes, aunque no sólo por todo lo que he aprendido de él y sus innegables aportaciones a parte de esta tesis, sino también por haberme brindado su amistad. Igualmente estoy obligado con Denis Auroux por su amabilidad y prontitud a la hora de aclararme diferentes aspectos de su trabajo. Asimismo quisiera mostrar mi reconocimiento a los asistentes a los encuentros G.E.S.T.A., especialmente a Vicente Muñoz.

A lo largo de estos años he tenido la fortuna de aprender matemáticas de personas muy diferentes. En primer lugar de mis profesores. Quisiera hacer aquí patente mi reconocimiento a todos ellos y muy especialmente a Carlos Andradas, quien me ha ayudado a comprender cosas que van mucho más allá de lo meramente matemático; también deseo agradecer a Robion Kirby su ayuda en circunstancias complicadas. Tampoco puedo olvidar que una parte sustancial de mi bagaje matemático la debo a innumerables conversaciones con Daniel Markiewicz y Henrique Bursztyn, sobre todo con este último, quien estando tan lejos está a la vez tan cerca.

Es de justicia que mencione a David, Charly, Raquel, Berto, Javier y Urbano por seguir soportándome después de todos estos años; no les falta mérito, al igual que a Barrete, Salchi y compañía que pese a todo continuan pasándome balones.

Igualmente agradezco a "La Caixa", al Ministerio de Educación Cultura y Deporte y al programa de Doctorado en Ingeniería Matemática del Departamento de Matemáticas de la Universidad Carlos III de Madrid el apoyo económico que me han prestado.

Por último y por encima de todo no puedo olvidarme de mi madre y de mi hermano que están siempre a mi lado.

Introducción

De acuerdo con el programa Erlangen de F. Klein [**34**], sabemos que una geometría $\mathcal{G}$ en una variedad diferenciable queda determinada por la elección de subgrupo $\mathrm{Mor}(\mathcal{G})$ del grupo de difeomorfismos de la variedad. Asimismo, su estudio es el de aquellas magnitudes, o más generalmente propiedades que no cambian mediante la acción de $\mathrm{Mor}(\mathcal{G})$; son los llamados invariantes de $\mathcal{G}$.

Es necesario el plantearse qué sea aquello que explica la elección de determinadas geometrías como dignas de estudio. En primer lugar, entendemos que un primer motivo reside en el origen físico que tienen algunas de ellas, siendo paradigmática en este sentido la geometría simpléctica o, más generalmente, la geometría de Poisson. En este caso nuestra variedad diferenciable representa el espacio de estados de un sistema y la geometría $\mathcal{S}$ viene determinada por las llamadas transformaciones canónicas. Por supuesto, es el estudio de la situación anterior el que revela que $\mathrm{Mor}(\mathcal{S})$ se puede caracterizar como el grupo de difeomorfismos de la variedad que preserva un determinado tensor $(2,0)$, la llamada *forma simpléctica.* Igualmente, se observa que todos los mecanismos y construcciones dependen de propiedades de este tensor expresables en el lenguaje de la geometría diferencial. Para ser más preciso éstas son su antisimetría, ser no degenerada y la condición de ser cerrada. De este modo se llega a la definición de estructura simpléctica en una variedad cualquiera M.

De un modo más general, la geometría de Poisson $\mathcal{P}$ aparece como el marco adecuado dónde se desarrolla la teoría de sistemas hamiltonianos. La variedad diferenciable M (siempre finito dimensional en nuestro caso) es el espacio de estados del correspondiente sistema; los observables corresponden a una subálgebra $\mathcal{O}$ del álgebra de funciones $C^\infty(M)$, que asumimos coincide con todo el álgebra (o más generalmente un subhaz del haz de funciones diferenciables de M). La evolución del sistema está dictada por una familia uniparamétrica de difeomorfismos o, en términos infinitesimales, por un campo de vectores. Por último, existe una aplicación $E\colon C^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $f \mapsto X_f$, de modo que f es conservada por X_f ($X_f(f) = 0$), y E es un morfismo de álgebras de Lie para el corchete $\{f,g\} := X_g(f)$. De nuevo se prueba que la correspondiente estructura de variedad de Poisson viene descrita por un tensor $(0,2)$ antisimétrico (un bivector) sujeto a una condición de cierre, y la geometría queda determinada por los difeomorfismos que preservan dicho tensor.

Otro ejemplo especialmente significativo es el de la geometría (semi)riemanniana $\mathcal{R}$. Aquí el origen es el estudio de inmersiones de curvas y superficies. Dicho de otro modo, el espacio en cuestión es $\mathbb{R}^3$, el grupo es el de las trasformaciones ortogonales y el invariante estudiado son las clases de inmersiones de curvas y superficies.

El primer resultado que muestra el interés del estudio de las superficies con métrica es el celebrado teorema egregio de Gauss; una vez generalizada la teoría por Riemann, su importancia queda de manifiesto por su conexión con la formulación de la teoría de la relatividad.

Estos dos ejemplos de geometrías, la simpléctica y de Poisson por un lado, y la semi-riemanniana por otro, tienen un carácter muy diferente. En primer lugar observamos que los tensores en cuestión han de satisfacer condiciones verificables en cada punto (antisimetría/simetría y no degeneración), y en el caso simpléctico y de Poisson se ha de cumplir una determinada ecuación en derivadas parciales. Esto, en contraste con la geometría semi-riemanniana, impone restricciones a la existencia del primer tipo de estructuras. Pero tal vez la diferencia fundamental queda reflejada en los "diferentes tamaños" de los correspondientes grupos de transformaciones de las estructuras, que resulta ser finito dimensional para $\mathcal{R}$ (grupo de Lie), e infinito dimensional para $\mathcal{S}$ y $\mathcal{P}$. Ello implica la existencia de comparativamente "menos" invariantes para $\mathcal{S}$ y $\mathcal{P}$. Hasta tal punto es así que en $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{P}$) no existen invariantes locales (resp. existen determinados teoremas locales de estructura), cosa que por supuesto la curvatura impide en el caso de $\mathcal{R}$. Como consecuencia de este fenómeno cualesquiera invariantes que caractericen $\mathcal{S}$ han de ser de naturaleza global. Por ello no es extraño que el estudio del fenómeno global que es inherente a la geometría simpléctica haya sido denominado topología simpléctica. Algo similar, aunque no tan acusado, ocurre con la geometría de Poisson, donde podemos hablar de una topología de Poisson que trata sobre los aspectos globales de la estructura.

Así pues, y para una geometría $\mathcal{G}$ que pueda definirse como las citadas mediante un objeto diferenciable (normalmente la sección de un determinado fibrado) con determinadas propiedades y cuyo estudio refleje fenómenos globales de la variedad, el párrafo anterior da pie a las siguiente cuestiones:

(i) Dada una variedad M, ¿cuáles son las obstrucciones a la existencia de dicha geometría o estructura en M? Inversamente, podemos tratar de demostrar que ciertas características globales de M no obstruyen la existencia de la correspondiente estructura.

Para estructuras simplécticas hay una primera obstrucción homotópica que hace referencia a la posibilidad de encontrar un tensor con las propiedades requeridas en cada punto. En cuanto a la parte concerniente a la ecuación que gobierna la condición de cierre, en caso de que la variedad sea compacta tan sólo se puede inferir la no anulación de la correspondiente clase de cohomología que define. Sin embargo, cuando la variedad es abierta y de dimensión ≥ 6, es una consecuencia del h-principio probado por M. Gromov **[27]** que la única obstrucción es la homotópica.

El punto de vista contrario fue tratado por R. Gompf. En su artículo **[24]** explotó en toda su generalidad la llamada suma conexa normal de variedades simplécticas para construir otras variedades con tipos topológicos prefijados. Entre otras aplicaciones, una de las más espectaculares fue la demostración de la existencia, en cualquier dimensión (necesariamente par) y para cualquier grupo G con presentación finita, de variedades simplécticas compactas cuyo grupo fundamental coincidía con G.

En el caso de las estructuras de Poisson, dada su generalidad no es esperable encontrar resultados similares válidos para todas ellas, pero parece lógico tratar de estudiar dichas cuestiones para la clase de las estructuras de Poisson regulares, es decir, aquellas para las que el rango del tensor es constante. Para la existencia de esta clase de estructuras con una foliación prefijada hay de nuevo una primera obstrucción homotópica. Si la variedad en cuestión resulta ser abierta en el sentido de variedades foliadas **[6]**, es una consecuencia del h-principio para variedades foliadas probado por M. Bertelson que la única obstrucción es la homotópica (también en **[6]**).

Al igual que en el caso simpléctico creemos que es importante explorar el punto de vista contrario y a ello dedicaremos el capítulo segundo de esta tesis. Así, definiremos la suma conexa normal de variedades de Poisson y probaremos, para cualquier dimensión, rango y grupo G con presentación finita, la existencia de variedades de Poisson regulares y compactas cuyo grupo fundamental coincide con G, demostrando así que el grupo fundamental no es una obstrucción a la existencia de dichas estructuras.

La segunda cuestión que de modo natural se plantea es:

(ii) Una vez demostrada la existencia de determinado tipo de estructuras $\mathcal{G}$, tratar de dar una clasificación de las mismas, donde dos estructuras $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son equivalentes si $\mathrm{Mor}(\mathcal{G}_1)$ puede ser conjugado a $\mathrm{Mor}(\mathcal{G}_2)$ mediante un difeomorfismo (más restrictivamente podemos imponer que dicho difeomorfismo sea además isotópico a la identidad).

Para ilustrar dicho problema daremos tres ejemplos que no dejan de estar relacionados entre si, tanto en las geometrías a las que hacen referencia como en los métodos de prueba. En primer lugar tenemos el caso de las formas de volumen $\mathcal{V}$ (en variedades compactas). La obstrucción a la existencia de dicha geometría es la orientabilidad de la variedad y es un resultado clásico de J. Moser **[45]** que la forma de volumen queda totalmente caracterizada por el volumen de la variedad, que es en principio computable. Es decir, la geometría queda totalmente descrita por la elección de un múltiplo de un invariante del tipo de homotopía de la variedad.

En segundo lugar tenemos el ejemplo de las propias estructuras simplécticas (M compacto). En este caso, y para la relación de equivalencia de conjugación por difeomorfismos isotópicos a la identidad, de nuevo por un teorema de J. Moser **[45]** se concluye que dos 2-formas simplécticas están en la misma clase si y sólamente si se pueden unir por un camino de 2-formas simplécticas con clase de cohomología constante.

En último término tenemos el caso de las estructuras de Poisson topológicamente estables $\mathcal{P}_{st}$ (o genéricas) en superficies cerradas orientadas. En un trabajo reciente **[51]**, y para la relación de equivalencia definida por conjugación por difeomorfismos isotópicos a la identidad, O. Radko dio una descripción del correspondiente espacio de moduli. Lo novedoso de dicho espacio frente a los anteriores ejemplos fue que su número de componentes conexas estaba en relación uno a uno con determinadas clases de isomorfismo de disposiciones de hipersuperficies en la variedad; para cada disposición la componente resultó ser difeomorfa a un espacio vectorial de dimensión el número de componentes conexas de la disposición más uno. Es más, dicho espacio venía dado por el grupo de una cohomología asociada a la estructura.

Hay una cuarta geometría $\mathcal{N}$ que es una generalización de $\mathcal{P}$ conteniendo también a $\mathcal{V}$. Es la llamada geometría de Nambu.

La mecánica de Nambu es una generalización de la hamiltoniana. A diferencia de esta última, la dinámica viene gobernada por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas no a un hamiltoniano, sino a un número mayor r; el número de hamiltonianos más uno se denomina *orden*. Desde el punto de vista diferencial esto significa que la estructura de Nambu viene definida por una sección de $\mathfrak{X}^{r+1}$ con determinadas propiedades de cierre, que en este caso son una ecuación algebraica y otra en derivadas parciales (véase [**53**] para la descripción precisa).

El análogo a las estructuras de Poisson estables en superficies orientables son las estructuras de Nambu estables de orden máximo. Esto es, para cualquier variedad compacta orientable de orden n, las secciones de $\mathfrak{X}^n$ cortando a la sección $\mathbf{0}$ de modo transverso.

En el capítulo tercero de esta tesis haremos un estudio de éstas análogo al de Radko para estructuras de Poisson estables. El principal resultado será un teorema de clasificación en clases de isotopía orientada. Veremos que el número de componentes conexas del espacio de moduli coincidirá con las correspondientes clases de ciertas disposiciones de hipersuperficies. Asimismo, cada componente conexa resultará ser isomorfa a un espacio vectorial cuya dimensión será el número de hipersuperficies de la disposición correspondiente a la componente conexa, más uno. Es más, el isomorfismo vendrá dado mediante la identificación con un determinado grupo de cohomología asociado a la estructura de Nambu.

Veremos que dicha clasificación es el resultado de observar que el trabajo de Radko [**51**], aunque escrito en el lenguaje de la geometría de Poisson, utiliza principalmente herramientas propias de la topología diferencial junto con la clasificación de formas de área en superficies.

Por último nos planteamos una tercera cuestión natural –bajo nuestro punto de vista aquella para la que lograremos los resultados más interesantes– relativa a estas geometrías con carácter topológico.

(iii) ¿Hasta que punto es rica la geometría? Es decir, nos planteamos la existencia de construcciones de topología diferencial compatibles con esta geometría.

Nótese que por definición estamos escogiendo geometrías sin invariantes locales. Esto quiere decir que los problemas que queramos resolver lo serán localmente, y la dificultad residirá en encontrar métodos que den soluciones globales.

Para clarificar este tercer punto tomaremos como ejemplo la geometría simpléctica $\mathcal{S}$. Una pregunta que es natural plantearse es la de la existencia de subvariedades simplécticas topológicamente no triviales. Esto es, soluciones al problema topológico de la construcción de subvariedades que sean compatibles con la estructura $\mathcal{S}$.

Dicho problema tan natural y fácil de plantear ha sido resuelto afirmativamente para variedades compactas hace tan sólo siete años por S. Donaldson [**12**], exigiendo la introducción de técnicas totalmente nuevas (técnicas "aproximadamente holomorfas") y que han supuesto una revolución en la investigación en este campo.

Problemas similares al de la existencia de subvariedades son por ejemplo la existencia de submersiones con fibras simplécticas, o más generalmente, estratificaciones por variedades simplécticas que estén "próximas" a ser fibraciones.

El objetivo o la filosofía subyacente, es la de tratar de reducir en lo posible la comprensión de las estructuras simplécticas en una variedad M a una mezcla de información topológica y de geometría simpléctica de variedades de dimensión menor.

En el primer capítulo de la tesis queremos hacer la misma clase de estudio pero para una nueva geometría $\mathcal{C}_{2,1}$ que denominamos *2-calibrada.* Podemos entender dicha geometría como el análogo de la simpléctica en dimensión impar.

Un ejemplo de variedad 2-calibrada es una variedad de contacto exacta (M^{2n+1}, α), $\alpha \in \wedge^1(M)$ (recordemos que se requiere que $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ sea una forma de volumen). Su distribución característica $\ker \alpha$ es de codimensión 1, y la 2-forma cerrada $d\alpha$ induce una estructura simpléctica en cada fibra de la distribución (o domina la distribución o la "calibra" en un sentido que haremos explícito más adelante).

Una *estructura 2-calibrada* es la generalización del concepto anterior: una distribución de codimensión 1 (de ahí el segundo subíndice de $\mathcal{C}_{2,1}$) y una 2-forma cerrada que la hace simpléctica. Obsérvese que se puede entender como una familia uniparamétrica de variedades simplécticas infinitesimales (por ello consideramos distribuciones y no sólo foliaciones) para las que hay una condición de cierre global análoga a la simpléctica. Por una cuestión de brevedad de ahora en adelante hablaremos de estructuras calibradas en vez de 2-calibradas.

Es interesante ver la diferencia que hay con las variedades de Poisson de codimensión 1. Para estas últimas, si intentamos plantear la condición de cierre en términos covariantes resulta ser una condición para una 2-forma foliada (las 2-formas han de ser cerradas y no degeneradas en cada hoja). No es cierto en general que toda estructura de Poisson admita un "levantamiento" a una estructura calibrada, es decir, la 2-forma foliada cerrada y no degenerada no admite una extensión a una 2-forma *cerrada*; veremos que la ausencia de la condición de cierre global es crucial para que las técnicas que vamos a desarrollar para variedades calibradas dejen de funcionar para variedades de Poisson de codimension 1 generales.

Desarrollaremos una geometría *aproximadamente holomorfa* para variedades calibradas compactas, resolviendo problemas como la existencia de subvariedades calibradas, estratificaciones por subvariedades calibradas y extenderemos otra serie de construcciones propias de la teoría aproximadamente holomorfa en variedades simplécticas.

A cada una de las tres cuestiones anteriores dedicaremos un capítulo de esta tesis. En cada uno de ellos incluiremos una descripción (más o menos somera dependiendo del caso) de los resultados más relevantes y de las ideas subyacentes.

CAPÍTULO I

La geometría de las variedades calibradas

1. Introducción y resultados

1.1. Motivación

Definición 1.1. *Una variedad (2-)calibrada es una terna (M, D, ω), donde M es una variedad diferenciable, D es una distribución de codimensión 1, y ω es una 2-forma cerrada y no degenerada sobre D. Decimos que ω es positiva sobre D o que domina a la distribución o que la calibra.*

La variedad calibrada se dice de tipo entero cuando $\frac{\omega}{2\pi}$ está en la imagen de $H^2(M;\mathbb{Z})$ en $H^2(M;\mathbb{R})$.

La dimensión de M es necesariamente impar. Nótese que el concepto de variedad calibrada es un análogo impar de la noción de variedad simpléctica.

Observación 1.2: En la literatura ya existe el concepto de foliación calibrada, que no es sino una foliación de codimensión arbitraria para la que existe una p-forma cerrada dominándola [**29**], donde p es la dimensión de las hojas (también son llamadas geométricamente "tight" u homológicamente "tight"). Ésta es por supuesto una condición más débil que la nosotros imponemos, pues pedimos que para la foliación D de dimensión $2n$, la forma que calibre se pueda expresar como ω^{2n}, $d\omega = 0$. Hasta donde el autor conoce, y para dimensiones diferentes de tres, no existen trabajos específicos para la clase de foliaciones de la que nos ocuparemos en este trabajo.

Todas las estructuras a las que hacemos referencia serán de clase C^∞ (también nos referiremos a ellas como diferenciables).

Tal y como acabamos de comentar, un ejemplo importante de variedades calibradas lo constituyen las 3-variedades compactas con foliaciones 2-dimensionales *diferenciables* calibradas (o foliaciones "taut").

Definición 1.3. *Sea $(M^3, \mathcal{F})$ una variedad orientable foliada por superficies orientables (y por tanto la foliación es co-orientable). Diremos que $\mathcal{F}$ es una foliación calibrada (taut) si $M \neq S^2 \times S^1$ y existe una 2-forma cerrada ω que restringe a una forma de área en cada hoja de $\mathcal{F}$.*

Recordemos que toda 3-variedad compacta admite foliaciones $\mathcal{F}$ por superficies [**36**], pero no toda foliación es lo suficientemente interesante como para darnos información sobre la topología de la variedad. Aquellas que nos interesan son esencialmente las que no tienen componentes de Reeb.

Es un teorema clásico que si la foliación no tiene componentes de Reeb generalizadas (véase [**52**]), entonces la foliación es calibrada.

Se pueden caracterizar estas foliaciones por la existencia de ciclos transversos pasando por cualquier punto (este resultado es un corolario de los trabajos de Novikov y Sullivan [**52**]). Es esta última caracterización sobre la que queremos abundar.

En una variedad diferenciable cualquiera M^n un modo natural de construir subvariedades es definiéndolas como el conjunto de ceros de funciones, o más generalmente, de secciones de ciertos fibrados. Cuando las subvariedad W así construida es de codimensión 2 y M es cerrada y orientable, la teoría de clases características nos permite determinar fácilmente el fibrado L a partir de la información homológica de W: L será el fibrado de línea complejo determinado por el elemento $[\omega] \in H^2(M;\mathbb{Z})$ cuyo dual de Poincaré es la clase $[W] \in H_{n-2}(M;\mathbb{Z})$. Por tanto, una vez analizada la información homológica que determina el fibrado el problema se transforma en uno de geometría diferencial: encontrar una sección τ de L transversa a la sección $\mathbf{0}$ de modo que $W_1 = \tau^{-1}(0)$ (la subvariedad W_1 será cohomóloga a W).

El problema añadido que se nos presenta es que la subvariedad W que buscamos, en principio de M^3, ha de ser transversa a $\mathcal{F}$. Localmente no hay ninguna obstrucción a la existencia de secciones tales, pero sí globalmente. El ejemplo clásico es la foliación de Reeb de S^3. Si existiese un ciclo W tranversal al toro frontera de las componentes de Reeb, al ser $H_2(S^3;\mathbb{Z}) = 0$, vendría dado como los ceros de una función $f\colon S^3 \to \mathbb{C}$. Como W con tales propiedades no existe, deducimos que existen funciones en S^3 con valores complejos que no puede ser globalmente transversales a $\mathbf{0}$ a lo largo de las direcciones de $\mathcal{F}$, aun siendo transversales en el sentido clásico. En otras palabras, la subvariedad W que definen será necesariamente tangente a $\mathcal{F}$ en un conjunto de puntos no vacío.

Incluso para foliaciones calibradas la existencia de un teorema de transversalidad foliada resulta no ser cierta. De hecho los contraejemplos ocurren ya a nivel semi-local.

En $\mathbb{R}^3$ con coordenadas x, y, s y con la foliación por planos horizontales $s = c$, $c \in \mathbb{R}$, se considera la función $f(x, y, s) = x^2 + s$. Es evidente que perturbaciones arbitrariamente pequeñas jamás serán transversas a la foliación. Si tuviésemos $\tilde{f}$ una perturbación tal, al ser la transversalidad a $\mathcal{F}$ una propiedad abierta perturbaciones arbitrariamente pequeñas h seguirían teniendo esta propiedad. Obviamente el correspondiente conjunto de ceros W_h seguirá siendo no transverso a la foliación pues la restricción de la proyección en la tercera coordenada a W_h tendrá un máximo global. Si nos fijamos en la hoja F_c en la que dicho máximo ocurre, observamos que $h_{|F_c}$ alcanza un mínimo global cuyo valor es cero (podemos suponer que h ha sido escogida de modo que su restricción a cada hoja es genérica, i.e., con extremos locales aislados). Un modo de evitar que se dé la situación anterior es considerar una clase de funciones cuya restricción a las hojas no tenga ni máximos ni mínimos locales; la elección obvia es trabajar con funciones que sean holomorfas a lo largo de la hojas. En este punto recordamos que es fácil introducir una estructura casi-compleja J a lo largo de las hojas que por cuestiones de dimensión resulta ser integrable. El problema que se plantea ahora es que es posible que para una elección de J, o incluso para cualquiera, el conjunto de funciones J-holomorfas no sea lo suficientemente amplio como para realizar las construcciones que deseamos. Una primera observación es que como la clase de funciones que manejamos ha de ser abierta (pues la transversalidad a lo largo de $\mathcal{F}$ es una propiedad abierta), más que trabajar con funciones J-holomorfas tendremos que hacerlo con aquellas que estén muy cercanas a éstas en un sentido que haremos preciso en su momento.

Obsérvese que el anterior punto de vista ya ha sido usado para el estudio de las variedades simplécticas compactas de cualquier dimensión. Es la llamada teoría *aproximadamente holomorfa*, introducida por S. Donaldson en **[12]**. De un modo muy impreciso, diremos que esta teoría afirma que para estructuras casi-complejas J compatibles con la forma simpléctica ω, existe una teoría de transversalidad fuerte para secciones *aproximadamente holomorfas* de los fibrados $L^{\otimes k}$, donde L es el fibrado dual a $\frac{[\omega]}{2\pi}$ y k es un entero suficientemente grande (suponemos que ω es de clase entera, es decir, $\frac{[\omega]}{2\pi}$ está en la imagen de $H^2(M;\mathbb{Z})$ en $H^2(M;\mathbb{R})$).

Así pues, tenemos un primer indicio de que es razonable estudiar la correspondiente teoría aproximadamente holomorfa al menos para foliaciones calibradas en variedades de dimensión 3 (pues existen ciclos transversos por cualquier punto).

Una segunda motivación proviene de la geometría de contacto. Recordemos que una estructura de contacto (exacta) en una variedad compacta M^{2n+1} viene dada por una 1-forma α no degenerada que verifica que $\alpha\wedge(d\alpha)^n$ es una forma de volumen. En particular $(M, \ker\alpha, d\alpha)$ es una variedad calibrada. Para variedades de contacto se ha demostrado la existencia de una geometría aproximadamente holomorfa rica para las secciones de los fibrados $L^{\otimes k}$, donde de nuevo L es el dual de $d\alpha$ (por tanto trivial). En este caso la estructura casi-compleja J está definida a lo largo de $\ker d\alpha$, que se ha de entender como la distribución de direcciones "holomorfas". Es más, se han obtenido resultados de diferente alcance usando por un lado una teoría intrínseca **[32]**,**[50]**, y por otro una teoría relativa aplicada a la simplectización $(M\times\mathbb{R}, d(t\alpha))$ **[43, 23]**. Luego parece razonable tratar de ver que los mecanismos de las teorías aproximadamente holomorfas (intrínseca y relativa) para variedades de contacto exactas no usan ninguna propiedad que no esté presente en las estructuras calibradas.

La definición de variedad o estructura calibrada es nueva, pero hay abundantes ejemplos de estructuras geométricas que resultan ser calibradas. Los ejemplos más interesantes de estructuras calibradas son por un lado las ya citadas estructuras de contacto, en las que la distribución D es absolutamente no integrable, y las foliaciones calibradas (recordemos que para nosotros las calibraciones viene dadas por potencias de una 2-forma cerrada); siendo más precisos hemos de distinguir el caso de dimensión 3 de las dimensiones superiores. Para el primero existen abundantes resultados en la literatura que se caracterizan casi en su totalidad por usar técnicas específicas de la geometría en dimensión 3 ([**19, 20, 17**]). Para dimensiones superiores a tres, el autor no conoce trabajos específicos para foliaciones de codimensión 1 calibradas en nuestro sentido; sin embargo hay literatura acerca de foliaciones de codimensión 1 en variedades de dimensión $p+1$ calibradas por p-formas (véase por ejemplo [**29, 49**]).

Conviene recordar que toda estructura calibrada (de tipo entero) en la que D es integrable dota a la variedad M en cuestión de una estructura de *Poisson* (M, Λ) con hojas simplécticas de codimensión 1, que además resulta ser integrable en el sentido de R. L. Fernandes y M. Crainic [**10, 11**]. Por tanto se dispone de los correspondientes resultados de geometría de Poisson.

Dentro de las estructuras calibradas que son de Poisson cabe destacar las estructuras *cosimplécticas.* Recordemos que una estructura cosimplectica en una variedad M viene dada por un par (α, ω) donde α es una 1-forma cerrada no degenerada, y ω es la 2-forma cerrada que domina $\ker \alpha$. Observemos que una estructura cosimpléctica es un tipo de foliación calibrada muy especial, pues la foliación viene definida por una 1-forma cerrada. Desde el punto de vista topológico, si asumimos que M es conexa y compacta es posible perturbar la estructura cosimpléctica de modo que su descripción sea relativamente elemental: por compacidad, podemos elegir una 1-forma α' muy cercana a α con periodos enteros y que define una foliación sobre la que ω es positiva. Por un resultado elemental de Tischler, existe una aplicación a S^1 (en la clase de homotopía de aplicaciones clasificadoras asociadas a $[\alpha']$) cuyas fibras son un numero finito de hojas de la foliación. Por la conectividad de M, es posible factorizar a través de una aplicación de S^1 en S^1 de grado el número de componentes conexas de cada fibra. El primer factor de la composición tiene fibra conexa P. Por tanto M es el "mapping torus" asociado a un difeomorfismo de P. La presencia de ω dota a P de una estructura de variedad simpléctica de modo que el difeomorfismo de pegado es en realidad un simplectomorfismo.

Además de las estructuras de contacto y de Poisson y atendiendo al comportamiento de D, creemos necesario hacer notar en este punto que existe literatura relativa a otra clase de estructuras calibradas. En el citado trabajo de Thurston y Eliashberg [**17**], y en principio para variedades de dimensión 3, los autores definen una confoliación como una distribución D de dimensión 2 para la que existe una 1-forma α que satisface $\alpha \wedge d\alpha \geq 0$ (que el signo sea positivo o negativo no es importante, el punto clave es que éste no cambie). La confoliación se dice "taut" (calibrada) si existe una 2-forma cerrada ω positiva sobre D (por tanto M^3 es orientable necesariamente) y además se satisface cierta condición homotópica. Es decir, una confoliación es una estructura calibrada en M^3 en la que la integrabilidad de D varía entre lo que le ocurre a una foliación y a una estructura de contacto (positivamente orientada). El resultado principal en [**17**] tiene como corolario que para toda foliación calibrada en M^3 (siempre distinta de $S^2 \times S^1$) podemos encontrar arbitrariamente cerca una estructura de contacto tal que podemos interpolarlas mediante confoliaciones. En realidad dicha interpolación ocurre a nivel de 1-formas y viene dada por un camino diferenciable α_t. Es necesario mencionar la motivación de este resultado: tal y como mencionamos, no todas las foliaciones por superficies de M^3 dan información topológica acerca de M^3 (la existencia de foliaciones que no sean calibradas no está obstruida). De modo análogo, las estructuras de contacto están divididas en las llamadas "tight" y las llamadas "overtwisted", que son el análogo a las foliaciones calibradas y las foliaciones con componentes de Reeb respectivamente; toda la información que aportan las segundas está contenida en la clase homotópica de la correspondiente distribución. Esta analogía, reforzada por otros resultados, permitía intuir una proximidad entre foliaciones calibradas y estructuras de contacto "tight" plasmada en el teorema de interpolación (resultados específicos de geometría de contacto nos indican que una estructura de contacto arbitrariamente próxima a una confoliación calibrada es necesariamente "tight").

Por último mencionamos que una manera natural de pensar en estructuras calibradas es partir del par (M, D) y tratar de encontrar 2-formas que dominen a D. Es decir, pensamos en estructuras calibradas como en distribuciones (de dimensión par y codimensión 1) con una propiedad adicional, y de la que veremos se derivarán multitud de consecuencias geométricas. El problema de la existencia una 2-forma tal no es para nada elemental, pero admite una formulación alternativa (dual) en función de la existencia de determinados ciclos estructurales [**52**]. Una vez más, en dimensión 3 es posible derivar interesantes resultados de esta equivalencia (y en dimensiones superiores se tienen resultados relativos $2n$-formas que calibran [**29**]). Es significativo observar que en dicha reformulación se supone la existencia de estrucutras casi complejas J en D para buscar 2-formas positivas en las líneas complejas que J define [**52**].

Pero también es posible adoptar el punto de vista contrario. Es decir, partimos de una 2-forma cerrada w no degenerada y de modo auxiliar consideramos distribuciones D transversales a $\ker\omega$, para tratar de deducir de ello información topológica acerca de M (véase [**38**]). Simplemente observamos que en dimensión mayor o igual que 5 sin más que requerir que el grupo estructural de TM se pueda reducir a $U(n)$ (obstrucción homotópica), y usando el h-principio, se deduce la existencia de 2-formas cerradas no degeneradas en cualquier clase de cohomología [**27**].

El primer resultado nuevo que queremos mencionar es la extensión a variedades calibradas (siempre compactas) de la existencia de ciclos transversos para foliaciones calibradas en 3-variedades compactas. Nuestros "ciclos transversos" serán además subvariedades calibradas de (M, D, ω).

Definición 1.4. *Sea (M, D, ω) una variedad calibrada. Una subvariedad calibrada de M es una subvariedad W para la que $TW \cap D$ es una distribución de codimensión 1 de TW y $\omega_{|TW\cap D}$ es no degenerada.*

Equivalentemente, W es transversa a D y $TW \cap D$ es un subespacio simpléctico de $(D, \omega_{|D})$.

Recordemos que cuando (M, D, ω) es una variedad compacta calibrada podemos escoger una 2-forma $\tilde{\omega}$ de tipo entero tan próxima como queramos a ω y dominando a D (i.e., positiva sobre D).

Teorema 1.5. *Sea (M^{2n+1}, D, ω) una variedad calibrada cerrada de tipo entero. Para k suficientemente grande y para cualquier punto $x \in M$, podemos encontrar subvariedades calibradas W_k de M de codimensión $2m$ conteniendo al punto x y verificando además:*

- *El dual de Poincaré de W_k es $[k\omega]$.*
- *La inclusión $i\colon W_k \hookrightarrow M$ induce aplicaciones $i_*\colon \pi_j(W_k) \to \pi_j(M)$ (resp. $i_*\colon H_j(W_k; \mathbb{Z}) \to H_j(M; \mathbb{Z})$) que son isomorfismos para $j = 0, ..., n-m-1$ y epimorfismos para $j = n-m$.*

Hemos de notar que este teorema puede presentarse también como un corolario elemental del trabajo de J. P. Mohsen [**43**] (véase también [**23**]).

Toda la teoría que vamos a desarrollar está fundamentalmente basada en un análisis cuidadoso de situaciones locales, junto con un resultado de globalización que tienen su origen en el artículo fundacional de S. K. Donaldson [**12**]. Veamos en primer lugar que el teorema 1.5 se cumple de modo más o menos obvio a nivel local.

Supongamos por simplicidad que nuestra variedad calibrada (M, D, ω) es de Poisson, es decir, D es una distribución integrable que da lugar a una foliación $\mathcal{F}$ por hojas simplécticas de codimensión 1. Por cada punto $x \in M$ tomamos cartas adaptadas a la foliación, por lo que tenemos una identificación local de $(M, \mathcal{F})$ con $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$. Si quisiésemos construir en principio un ciclo transverso por x, es razonable intentar prolongar el eje vertical $\{0\} \times \mathbb{R}$ para que siga siendo transverso a $\mathcal{F}$, y asegurarnos de que este camino C acabe retornando a la hoja F_x a la que pertenece x.

En dimensión 3 se observa que si no hay tal retorno, podríamos tomar un entorno tubular de caminos paralelos a C que se prolongasen indefinidamente. Ello querría decir que con la evolución temporal el área de cada disco (intersección local del entorno con la correspondiente placa de la hoja) iría haciéndose muy pequeña, pues dicho entorno habría de tener volumen finito (esto es exactamente lo que ocurre en el interior de una componente de Reeb). Luego un modo de evitar este fenómeno es elegir una coordenada vertical (la última en $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$) que esté globalmente definida, y tal que para una determinada forma de área a lo largo de las hojas, el transporte de la misma no tienda a cero. Esto en dimensión 3 equivale a la existencia de una 2-forma global ω dominando a D. La coordenada vertical globalmente definida apropiada viene dada por $\ker \omega$, pues cualquier campo X generándolo verifica $L_X \omega = 0$.

De lo anterior se infiere que la carta local que es razonable elegir para (M, D, ω) es cualquiera adaptada a la foliación cuya dirección vertical coincida con $\ker \omega$. Es más, tal y como veremos es posible lograr una *carta de Darboux* con coordenadas $x^1, y^1, ..., x^n, y^n, s$ en la que ω coincida con $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i$.

Esto quiere decir que estas variedades calibradas son variedades foliadas muy especiales. En general, podemos caracterizar a las variedades foliadas como aquellas en las que el pseudogrupo asociado a las cartas admite una reducción de $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^{2n+1})$ a $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}) \times \mathrm{Diff}(\mathbb{R})$. La estructura calibrada da una nueva reducción a $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^{2n}) \times \mathrm{Diff}(\mathbb{R})$ (coordenada vertical global) y posteriormente a $\mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \times \mathrm{Diff}(\mathbb{R})$.

Si la distribución es no integrable ya no hay ausencia de invariantes locales, pero el "dibujo" es similar, pues si tomamos abiertos suficientemente pequeños la distribución D apenas diferirá de la dada por hiperplanos horizontales. Dicho de otro modo, podremos encontrar coordenadas $x^1, y^1, ..., x^n, y^n, s$ tal que el pullback de ω sea w_0, y D coincida en el origen con D_h, la foliación definida por las superficies de nivel de s.

Es posible pensar en una construcción de subvariedades calibradas de dimensiones arbitrarias análoga a la de ciclos. Localmente, la subvariedad correspondería a una subvariedad simpléctica multiplicada por la coordenada vertical. Es más, disponiendo de cartas de Darboux, es razonable pensar en una subvariedad de la forma $V \times \mathbb{R}$, donde V es un subespacio vectorial simpléctico de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. La situación es por supuesto mucho más complicada que para ciclos. En primer lugar, y para cada hoja F_x, es necesario que todos los subespacios simplécticos locales (o más generalmente subvariedades de $\mathbb{R}^{2n}$) "peguen" en una subvariedad simpléctica; éste es exactamente el problema que resuelven las técnicas aproximadamente holomorfas en variedades simplécticas compactas, la construcción de subvariedades simplécticas globales pegando soluciones locales. Hacemos notar que las hojas no son necesariamente compactas, pero sí lo es la variedad.

En segundo lugar, es necesario que la subvariedad en una determinada hoja se propague a lo largo de una dirección transversal como subvariedades simplécticas, y que retorne a la hoja de partida; además, se ha de conseguir a partir de ese retorno "cerrar" la subvariedad. De nuevo esto es razonable que ocurra porque en caso de que la hoja sea compacta, la teoría aproximadamente holomorfa para variedades simplécticas nos dice que las subvariedades simplécticas de partida y llegada son isotópicas con una isotopía mediante subvariedades simplécticas.

Luego no es descabellado pensar que los mecanismos de la teoría aproximadamente holomorfa para variedades simplécticas se pueden adaptar a variedades calibradas.

Recordemos los principios de la teoría aproximadamente holomorfa para variedades simplécticas compactas (M, ω), que eventualmente deberíamos reproducir para variedades calibradas.

1.2. Algunas ideas subyacentes a la geometría aproximadamente holomorfa en variedades simplécticas

Un primer elemento de esta teoría es la observación, a nivel lineal, de que un modo de escoger subespacios (vectoriales) V simplécticos es mediante la introducción de una estructura compleja J compatible con ω; automáticamente todo subespacio J-complejo es simpléctico. Siendo además la condición simpléctica abierta, si un subespacio V está "suficientemente próximo" a JV seguirá siendo simpléctico. En consecuencia, para cualquier otra variedad casi-compleja $(N, \bar{J})$, la existencia de una aplicación $f\colon M \to N$

"aproximadamente" $(J, \bar{J})$-compleja y que sea transversa a una subvariedad $N_1 \subset N$ casi-compleja, dará lugar a una subvariedad simpléctica de M de la misma codimensión que N_1 en N.

Por tanto un primer problema es encontrar variedades casi-complejas $(N, \bar{J})$ candidatas a poseer "suficientes" aplicaciones cercanas a ser complejas (cercanas en un sentido que haremos preciso más adelante y "suficientes" en el sentido de que dada una de estas aplicaciones, podremos encontrar perturbaciones arbitrariamente próximas de modo que sigan estando próximas a ser holomorfas y que además sean transversas a las subvariedades casi-complejas N_1). Es lógico, en vez de usar variedades casi-complejas generales como espacio de llegada, empezar por los espacios $(\mathbb{C}^m, J_0)$ donde además podemos sumar aplicaciones (lo que facilita la definición de las posibles perturbaciones). Más generalmente, buscaremos secciones de fibrados vectoriales complejos sobre M.

La indicación de qué fibrados son los adecuados proviene del caso en que J es integrable. En tal situación podemos buscar secciones genuinamente holomorfas, pues las ecuaciones de Cauchy-Riemann no están sobredeterminadas. Los resultados de geometría compleja nos indican que una clase de fibrados, en principio de línea, que admiten muchas secciones son los denominados muy amplios. Existe además un modo más o menos fácil de encontrarlos. Basta con contar con un fibrado de línea (hermitiano) L con conexión ∇ hermitiana, tal que su curvatura F sea positiva sobre TM (fibrado amplio). Las potencias tensoriales suficientemente altas de L cuentan con muchas secciones holomorfas (son fibrados muy amplios); tantas como para contar con algunas que son transversas a la sección $\mathbf{0}$ del correspondiente fibrado $L^{\otimes k}$ (teorema de Bertini), que es una subvariedad compleja del espacio total del fibrado, que a su vez es una variedad compleja.

En la situación anterior iF define una 2-forma cerrada de clase entera que dota a M de una estructura simpléctica. Es en definitiva lo que se conoce por una estructura Kähler, pues J es evidentemente compatible con la forma simpléctica. Obviamente, iF es de clase entera (tenemos por tanto lo que habitualmente se denomina como una estructura de Hodge). En presencia de una estructura de Hodge (M, J, ω), el proceso anterior se puede invertir para construir un fibrado amplio (L, ∇) cuya curvatura es exactamente $-i\omega$.

La cuestión que se plantea es si en el caso en que J no es integrable existirán suficientes secciones de estos fibrados cercanas a ser J-holomorfas. Localmente, la existencia de cartas de Darboux y el hecho de que la curvatura del fibrado sea ω_0, permite encontrar modelos locales tanto para la base como para el fibrado (usando una trivialización adecuada). Suponiendo que J en estas coordenadas es integrable (en realidad que coincide con J_0, la estructura canónica compleja de $\mathbb{C}^n$) es posible escribir explícitamente soluciones a las ecuaciones de Cauchy Riemann con características muy particulares. Estas soluciones tiene *decaimiento gaussiano* y juegan el papel de funciones meseta de la teoría, pues permiten localizar el problema de transversalidad y convertirlo de uno de secciones a uno de funciones.

En el caso en que J sea no integrable, si la carta es lo suficientemente pequeña estas secciones serán casi soluciones de las correspondientes ecuaciones de Cauchy Riemann. Por supuesto, no basta con reducir el tamaño de la carta y quedarse con la anterior solución, pues ésta pasa a ser prácticamente constante en la carta y por tanto no decrecería de modo adecuado para estar lo suficientemente próxima a ser una sección casi-holomorfa. Pero hay un modo de evitar este problema que consiste no en restringir a un abierto más pequeño, sino en contraer todo el dibujo. En particular, se usa el factor de contracción $k^{-1/2}$. Una consecuencia de dicho proceso es que el fibrado al que pertenece la nueva sección deja de ser L para convertirse en $L^{\otimes k}$. En otras palabras, la forma simpléctica inducida en la base pasa a ser $k\omega$ (y la métrica Kähler también es multiplicada por k), lo que implica que la correspondiente carta de Darboux y trivialización son el resultado de contraer por el citado factor las asociadas a la 2-forma original $k\omega$. Otro modo de decirlo es que al aumentar la curvatura tenemos acceso a regiones cada vez más pequeñas en las que nuestra estructura casi-compleja J necesariamente se parece (tanto como queramos aumentando k) a una integrable.

La existencia de las llamadas secciones de referencia sirve para transformar el problema de transversalidad global en multitud de problemas de transversalidad local (aumentando este número con k) para funciones. Una observación importante es que si pretendemos sumar soluciones locales, dado que las secciones de referencia tienen soporte que se extiende mucho más allá de donde las usamos para trivializar y localizar el problema de transversalidad, habrá interferencia entre soluciones diferentes debido al solapamiento de los correspondientes soportes. Y la transversalidad a una subvariedad no se comporta bien con respecto a la suma de secciones.

Es necesario usar el concepto de transversalidad estimada. La idea es bastante sencilla: la suma de dos funciones transversas a la sección **0** puede dejar de serlo; por ejemplo porque ambas se anulen en un mismo punto con diferencial opuesta para una cierta trivialización del fibrado (o más geométricamente, sus grafos forman ángulos opuestos). La transversalidad estimada se reduce a pedir que el grafo de la sección no corte sólo a la sección **0** de modo transverso, sino que haga lo propio, y "con suficiente ángulo", con las copias paralelas en un entorno tubular de la sección **0**.

La ventaja de este concepto es que es C^1-abierto en el sentido de que si una sección es suficientemente transversa a la sección **0**, al sumarle otra con norma C^1 pequeña comparada con la "cantidad de transversalidad" (con el ángulo con que corta a las copias paralelas de la sección **0**), el resultado es una sección que todavía es transversa, y cuya "cantidad de transversalidad" se puede estimar.

Sin duda el elemento más delicado de la teoría aproximadamente holomorfa es demostrar que, en efecto, toda función cercana a ser holomorfa admite perturbaciones pequeñas que la hacen transversa a la sección **0** (lema de transversalidad local) con una cantidad de transversalidad estimada tal, que se puede desarrollar un esquema para ir resolviendo el problema de transversalidad localmente, y que al sumar de todas las perturbaciones el resultado es una sección todavía transversa a **0** (esquema de globalización).

El esquema anterior es aplicable para obtener transversalidad no sólo a la sección **0** sino a otras (sucesiones de) subvariedades holomorfas de $L^{\otimes k}$, o de otros fibrados con propiedades similares a $L^{\otimes k}$ y, más generalmente, a determinadas estratificaciones por subvariedades holomorfas. Esto no es extraño ya que la construcción es puramente local y localmente se pueden encontrar coordenadas holomorfas para que una subvariedad holomorfa aparezca como la sección $\mathbf{0}$ de un fibrado local trivial.

Una vez observada la existencia de (sucesiones de) secciones *aproximadamente holomorfas* con buenas propiedades de transversalidad, es natural estudiar sus espacios de degeneración, o dicho de otro modo, definir unos espacios de r-jets para estas secciones, determinar allí los subespacios o más generalmente las estratificaciones de los lugares de degeneración y tratar de demostrar un teorema de transversalidad fuerte, i.e., encontrar secciones cuyos jets sean transversales a estas estratificaciones (secciones *r-genéricas*). De nuevo se observa que dicho teorema se cumple, pues los correspondientes fibrados y estratificaciones son susceptibles de las construcciones que resuelven el problema de transversalidad (aunque las complicaciones técnicas no son nada triviales).

El último paso es, una vez que se tiene la existencia de (sucesiones de) secciones r-genéricas, tratar de obtener formas normales para ellas en determinadas situaciones. Por ejemplo, análogos a funciones de Morse complejas o a funciones a $\mathbb{C}^2$ con los tipos de singularidad canónicos. Dichas secciones inducen toda clase de estructuras interesantes en la variedad de partida, que por ser objetos prácticamente J-complejos, son también simplécticos.

1.3. Descripción de los contenidos y resultados

En este trabajo pretendemos hacer un estudio análogo al esbozado en el apartado anterior para las variedades simplécticas, pero para variedades calibradas. Adoptaremos el punto de vista más general de D. Auroux [4], empezando en la sección 2 con una variedad (M, D, g) con una estructura casi-compleja J en D (definición 2.1), para la que se hace el correspondiente estudio de su álgebra lineal. A continuación introducimos sucesiones de fibrados susceptibles de contar con suficientes secciones aproximadamente holomorfas (definición 2.2). Paralelamente se define un elemental proceso de simplectización que nos permitirá obtener la teoría a través de un refinamiento de los de los resultados existentes para variedades casi-complejas pares (teoría relativa).

En la sección 3 definimos (definición 3.1) el modelo local para variedades casi-complejas (siempre impares salvo que digamos lo contrario), que no es sino la versión foliada (con un parámetro real) del disponible para variedades pares. Perseguimos, para todas la secciones y sus asociadas (derivadas covariantes, proyecciones de las mismas, componentes holomorfas y antiholomorfas) en la variedad original, calcular todas las estimaciones necesarias para los pull-backs al citado modelo usando los elementos geométricos del mismo (distribución, normas, distancias, conexiones, estructura casi-compleja J_0) –que son fáciles de manejar– y esperamos que las cotas obtenidas sean comparables a las correspondientes empleando los elementos globales originales. Además queremos que dichos resultados valgan para todos los puntos de M y para todo valor de k (que sean *uniformes*). La razón es que muchas cotas vendrán multiplicadas por un factor de la forma $k^{-1/2}$ (por ejemplo la que mide la antiholomorfía de las secciónes), lo que implicara que para k suficientemente grande serán tan próximas a cero como queramos dando lugar a las propiedades perseguidas. Todo esto quedará recogido en el concepto fundamental de igualdad o propiedad aproximada (definición 3.6).

Dependiendo de lo que queramos estimar usaremos diferentes cartas en la base (las *coordenadas aproximadamente holomorfas* de la definición 3.34) e incluso *cartas r-comparables* (definición 3.4) en el espacio total de los fibrados.

En el modelo local la distribución D es la integrable por planos horizontales. Para estimar distancias entre distribuciones recordaremos los conceptos de ángulo máximo y mínimo (definiciones 3.10, 3.11).

La posibilidad de elegir cartas con buenas propiedades nos permitirá ver que para variedades casi-complejas con sucesiones de fibrados muy amplios, la situación es análoga a la de las variedades calibradas (M, D, ω); la sucesión iF_k de 2-formas positivas a lo largo de D tiene propiedades similares a las que tendría $k\omega$, e igual ocurre con los pares (iF_k, J) (lema 3.21).

Daremos de modo explícito la definición de sucesión de secciones aproximadamente holomorfa (A.H.), así como de sucesión con decaimiento gaussiano respecto a un punto de M (definición 3.25), y probaremos la existencia de *secciones de referencia* usando lemas previos que nos ayudarán a comparar las estimaciones usando los elementos del modelo integrable con las reales que usan los elementos originales globales (métrica, conexión, distribución, estructura casi-compleja, derivadas covariantes,...).

Todo lo introducido en esta sección constituyen elementos necesarios para el desarrollo de la teoría intrínseca.

El último apartado de la sección contiene una discusión importante acerca de las diferentes teorías intrínsecas aproximadamente holomorfas, dando condiciones para su equivalencia. La existencia de diferentes teorías es consecuencia de que a nivel lineal el espacio D^* no se ve de modo canónico como un subespacio de T^*M. Cada retracción a la proyección canónica $T^*M \to D^*$ define una teoría diferente.

Finalizaremos la sección 3 observando las diferencias entre los elementos de la teoría intrínseca y los provenientes de la teoría par, trivialmente disponibles gracias al proceso de simplectización, así como describiendo la teoría correspondiente para *sucesiones muy amplias* de fibrados de rango arbitrario.

En la sección 4 introducimos, para una sucesión E_k apropiada de fibrados vectoriales hermitianos sobre (M, D, J), la sucesión de fibrados $\mathcal{J}^r_D E_k$ de r-jets pseudoholomorfos (definición 4.1). La definición es, al igual que en caso par, aquella que hace que en el modelo local estemos considerando el fibrado de jets holomorfos foliados (en realidad no es la noción usual pues el operador ∂ en la carta viene acoplado con una forma de conexión). Notamos que para una sucesión de secciones de E_k, al definirse los r-jets de modo sucesivo a partir de la parte holomorfa de la derivada covariante, la conexión de E_k entra en juego de modo determinante. Simplemente recordemos que en el modelo local (Kähler) la noción de función holomorfa no es la usual debido a la presencia de la forma de conexión. La consecuencia fundamental es que para la estructura compleja obvia en $\mathcal{J}^r_D E_k$, métrica hermitiana y conexiones, el r-jet de una sucesión A.H. de secciones de E_k no es una sección A.H. de $\mathcal{J}^r_D E_k$. Solventamos esta pega introduciendo una nueva estructura compleja en el fibrado de r-jets para la que esta propiedad sí se cumple. El resultado fundamental es que si E_k es una sucesión de fibrados para la que la teoría de transversalidad de secciones A.H. es posible (sucesión muy amplia), ocurre lo propio con $\mathcal{J}^r_D E_k$ (proposición 4.6).

De modo paralelo introducimos los elementos análogos para la teoría relativa. En este caso, para una distribución J-compleja G (una *polarización*) de la variedad casi-compleja par (M, J), se define de modo natural el subfibrado $\mathcal{J}^r_G E_k$ de $\mathcal{J}^r E_k$ de r-jets a lo largo de G, y se hace lo propio para la sucesión de r-jets a lo largo de G asociada a una sucesión A.H. de secciones de E_k. Es importante notar en este punto que no pretendemos desarrollar la teoría aproximadamente holomorfa en esta sucesión de subfibrados (lo que supondría verificar que es *muy amplia*), sino de modo análogo a como se procede para jets foliados usaremos la submersión natural de $\mathcal{J}^r E_k$ a $\mathcal{J}^r_G E_k$ para trasladar el problema de transversalidad en el subfibrado al correspondiente en el fibrado; por supuesto habrá que comprobar cuándo esto es posible, y que la solución del problema inducido en el fibrado es también la del original en el subfibrado.

Al igual que para variedades pares, no sólo queremos lograr transversalidad de sucesiones de secciones de E_k (y $\mathcal{J}^r E_k$) a la sección $\mathbf{0}$, sino a (sucesiones de) subvariedades e incluso estratificaciones de los fibrados correspondientes. En la primera parte de la sección 5 introducimos la noción de (sucesión de) *estratificaciones aproximadamente holomorfas* (definición 5.2) –que extiende de modo natural la situación para variedades pares– dándose una descripción local de las mismas.

A continuación recordamos el concepto de transversalidad uniforme de una sucesión de secciones de E_k a la sección $\mathbf{0}$, y se generaliza de modo obvio a estratificaciones aproximadamente holomorfas. La parte técnica que sigue (apartado 5.2) usa la descripción local para probar que la transversalidad uniforme local a esta clase de estratificaciones equivale a transversalidad estimada de una función $h\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^m$ a $\mathbf{0}$ a lo largo de las direcciones holomorfas (de la foliación por hiperplano complejos) (lema 5.9). En este punto, es necesario un análisis más detallado del concepto de ángulo mínimo y sus variaciones. Es curioso observar que la discusión anterior, en principio orientada a la teoría intrínseca, es perfectamente válida para la teoría relativa. Esto no es sino otro ejemplo de que ambas teorías están basadas en las mismas ideas pues de alguna manera la teoría intrínseca es también relativa con respecto a todas las direcciones del espacio tangente (o si se quire ambos modelos locales son versiones foliadas del modelo para variedades casi-complejas pares).

Es posible debilitar la definición de sucesión de estratificaciones A.H. a la más general de cuasi-estratificación (definición 5.23), de modo que la transversalidad a ella se obtenga mediante los mismos mecanismos. El concepto de cuasi-estratificación se introduce para trabajar fundamentalmente con la *cuasi-estratificación de Thom-Boardman-Auroux* (apartado 5.3). En geometría Kähler los espacios vectoriales de secciones de $L^{\otimes k}$ (sistemas lineales completos) son usados para definir del modo obvio aplicaciones a espacios proyectivos. El análogo a los sistemas lineales de rango m son las sucesiones τ_k de secciones A.H. de los fibrados $\mathbb{C}^{m+1} \otimes L_k$. Fuera de los puntos que son enviados a la sección $\mathbf{0}$ (puntos base A_k), dan lugar a una sucesión de aplicaciones A.H. $\phi_k \colon M - A_k \to \mathbb{CP}^m$. Es posible tratar de perturbarlas para hacerlas r-genéricas. Para ello es necesario definir el fibrado (no lineal) de r-jets pseudo-holomorfos $\mathcal{J}_D(M, \mathbb{CP}^m)$, y en su espacio total las correspondientes estratificaciones análogas a las de Thom-Boardman. En realidad, lo que haremos es usar la submersión obvia $\mathbb{C}^{m+1} - \{0\} \to \mathbb{CP}^m$ para definir una cuasi-estratificación de $\mathcal{J}^r_D E_k$, que llamaremos de Thom-Boardman-Auroux, de modo que la transversalidad estimada a ésta de los r-jets de las secciones τ_k, implicará la transversalidad estimada a la estratificación de Thom-Boardman de los r-jets de las proyectivizaciones ϕ_k. La propia definición de la estratificación de Thom-Boardman-Auroux y las propiedades que conducen a comprobar la holomorfía aproximada de los estratos (también en el caso relativo) son delicadas (proposiciónes 5.24 y 5.25 y lema 5.27). El problema fundamental es que para estratificaciones de los fibrados de jets pseudo-holomorfos, el hecho de haber modificado la estructura casi-compleja hace que sea realmente complicado comprobar que ciertos estratos son de la clase adecuada para poder lograr transversalidad a ellos (esencialmente la dificultad reside en probar que están localmente definidos por funciones aproximadamente holomorfas para esta nueva estructura casi-compleja), y en este caso particular es necesario utilizar ideas ad hoc.

La sección 6 contiene la prueba del teorema de transversalidad fuerte para sucesiones de cuasi-estratificaciones A.H. de los fibrados $\mathcal{J}^r_D E_k$, y la versión relativa para variedades casi-complejas pares polarizadas (teorema 6.1, corolario 6.3). Notamos que la perturbación ocurre a nivel de secciones de E_k de modo que sus r-jets resultan ser transversos (por eso es transversalidad fuerte). Todo los apartados anteriores hacen que se reduzca a un problema de transversalidad estimada para funciones A.H. $h \colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^m$, junto con un adecuado proceso de globalización. Este último es un pequeño refinamiento del ya descrito en **[32]** ó **[50]** para variedades de contacto, y que extiende trivialmente al enunciado por S. Donaldson **[12]** (y refinado por D. Auroux **[2]**).

Quisiéramos hacer en este punto un comentario relativo al teorema de transversalidad local. Dicho resultado se basa en el hecho de que el teorema de transversalidad local para funciones A.H. $h \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ es válido para familias uniparamétricas. Se verifica porque el parámetro es real. Para parámetro complejo no es cierto pues al igual que en el caso real la transversalidad para jets complejos foliados no se comporta bien con respecto a la propia foliación. Éste es el motivo último de trabajar con distribuciones sólo de codimensión 1.

Hay una segunda complicación debida a la no integrabilidad de D. Veremos que para obtener transversalidad fuerte a estratificaciones de $\mathcal{J}^r_D E_k$, $r \geq 1$, será necesario usar secciones para las que se tenga control sobre todas sus derivadas (recogido en el concepto de secciones $C^{\geq r+h}$-A.H.).

Para las construcciones relativas, el resultado local fundamental es un teorema de J. P. Moshen [**43**] para (sucesiones de funciones) A.H. $h_k\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ y una subvariedad fija $Q \subset \mathbb{C}^n$ fijada de antemano, que mediante la elección de cartas adaptadas a las subvariedad queda reducido al teorema de transversalidad local para sucesiones de funciones A.H. $\bar{h}_k\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$.

Comentaremos como la diferente "calidad" de las perturbaciones (mejor en la teoría relativa que en la intrínseca) permite en la primera trabajar con secciones para las que el control no ha de ser tan estricto como en la teoría intrínseca.

En la sección 7 enunciamos una serie de resultados que se infieren de los teoremas probados.

Las aplicaciones para variedades calibradas que se obtienen a nivel de 0-jets son en primer lugar el ya mencionado teorema 1.5, que expresa simplemente transversalidad a la sección **0**, y el subsiguiente resultado relativo a la existencia de subvariedades determinantales:

Proposición 1.6. *(M, D, ω) una variedad calibrada (compacta de tipo entero) y $L^{\otimes k}$ la sucesión de potencias del fibrado de línea precuantizable. Sean E, F fibrados hermitianos vectoriales con conexión y consideremos la sucesión $I_k = E^* \otimes F \otimes L_k$. Para k suficientemente grande existen τ_k sucesiones A.H. de secciones de I_k para las que los lugares determinantales $\Sigma_k^i(\tau_k) = \{x \in M |\ rk(\tau_k) = i\}$ son subvariedades calibradas de tipo entero que estratifican M.*

Usando la estratificación de Thom-Boardman-Auroux obtenemos lo que puede considerarse el resultado fundamental de la teoría aproximadamente holomorfa para variedades calibradas.

Teorema 1.7. *Sea (M, D, ω) una variedad calibrada cerrada de tipo entero. Una vez elegida una estructura casi-compleja compatible J es posible encontrar aplicaciones genéricas a cualquier $\mathbb{CP}^m$.*

Como corolario, obtenemos un análogo al teorema de inmersión en proyectivos para variedades simplécticas (ya probado para variedades de contacto en [**47**]).

Corolario 1.8. *Sea (M^{2n+1}, D, ω) una variedad calibrada compacta de clase entera. Sea J una estructura casi-compleja compatible con ω. Existe un $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq K$ se pueden encontrar aplicaciones $\phi_k\colon M \to \mathbb{CP}^{2n+2}$ verificando:*

- *ϕ_k es una inmersión (sin autointersecciones) aproximadamente holomorfa.*
- *$[\phi_k^*\omega_{FS}] = [k\omega]$, donde ω_{FS} es la forma de Fubini-Study de $\mathbb{CP}^{2n+2}$.*

Obsérvese que este resultado –sin hacer referencia a la estructura casi-compleja– se obtiene trivialmente aplicando la teoría de clases características junto con la densidad de las inmersiones (sin autointersecciones) cuando el espacio de llegada tiene suficiente dimensión. Lo interesante es que si por ejemplo tenemos una foliación holomorfa (singular) de $\mathbb{CP}^{2n+1}$, podemos encontrar inmersiones transversas a la misma a lo largo de D y así inducir foliaciones en M por subvariedades calibradas.

La sección 8 está dedicada al estudio de formas normales para aplicaciones a $\mathbb{CP}^1$ y los consiguientes corolarios geométricos para variedades calibradas.

Observemos en primer lugar que incluso en el caso de dimensión par una aplicación r-genérica aproximadamente holomorfa no tiene porqué tener el mismo comportamiento topológico que una aplicación holomorfa. Obsérvese además que en caso impar el propio comportamiento de una aplicación holomorfa genérica no es tan fácil de describir debido a la dirección no holomorfa que no somos capaces de controlar. Aun así, cuando el espacio de llegada tiene dimensión compleja 1, veremos que existe una descripción razonable (además sólo es necesario trabajar con 1-jets). En esta misma situación y en el caso aproximadamente holomorfo, es posible perturbar ligeramente la aplicación 1-genérica $\phi_k \colon M - Z_k \to \mathbb{CP}^1$ para que tenga los modelos locales adecuados, donde dicha perturbación ocurre en un entorno del lugar de degeneración del 1-jet. Sin entrar en detalles diremos que en esos puntos, que forman una subvariedad de dimensión 1, en principio el tamaño reducido de la parte antiholomorfa de la derivada no da gran información pues la parte holomorfa, que es la componente homogénea de grado 1 del 1-jet, también se anula. La perturbación buscada es aquella que hace que en esos puntos también la parte antiholomorfa se anule, y por tanto se dispongan de las mismas formas normales que para funciones holomorfas.

La existencia de formas normales tiene como aplicación la existencia de estructuras de pincel de Lefschetz para variedades calibradas cerradas.

Definición 1.9. *Sea (M, D, ω) una variedad calibrada. Una estructura de pincel de Lefschetz viene dada por una terna (A, f, B) de modo que:*

(1) *A es una subvariedad calibrada compacta de M de codimensión real 4.*
(2) *$f \colon M - A \to S^2$ es una aplicación diferenciable.*
(3) *B, que se define como el conjunto de puntos en los que f no es una submersión a lo largo de las direcciones de D, es una subvariedad calibrada de dimensión 1. La imagen por f de cada componente conexa de B es inmersa y las intersecciones son puntos dobles transversos (es decir, $f_{|B}$ es genérica).*

Además f verifica:

- *Para cada punto $a \in A$ existen $z^1, ..., z^n, s$ coordenadas compatibles con ω centradas en a y una carta holomorfa de $\mathbb{CP}^1$, de modo que en una bola euclídea del dominio de la carta, A viene definido por la ecuaciones $z^1 = z^2 = 0$, y fuera de A, $f(z, s) = \frac{z^2}{z^1}$.*
- *Para cada punto $b \in B$ existen $z^1, ..., z^n, s$ coordenadas compatibles con ω centradas en b y una carta holomorfa de $\mathbb{CP}^1$, de modo que $f(z, s) = g(s) + (z^1)^2 + \cdots (z^n)^2$, donde $g(0) = f(b)$ y $g'(0) \neq 0$.*

Fuera de los valores singulares $f(B)$, la imagen inversa de cada punto regular c es una subvariedad calibrada abierta de $M - A$. Debido al modelo local en los puntos de A, es obvio que el cierre de $f^{-1}(c)$ es la subvariedad cerrada calibrada $f^{-1}(c) \cup A$. Nos referimos a esta compactificación como a una fibra de f.

Sin entrar aquí en los detalles acerca de las cartas compatibles con ω de la definición anterior (véase la definición 8.4), enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 1.10. *Toda variedad calibrada cerrada admite una estructura de pincel de Lefschetz.*

En la última sección consideraremos el caso específico de foliaciones calibradas y las variaciones en la teoría que son propias de este caso.

Finalmente, haremos mención especial al caso 3-dimensional que nos sirvió como motivación, reinterpretando para él parte de los resultados obtenidos.

2. Variedades casi-complejas: álgebra lineal, sucesiones muy amplias de fibrados y simplectizaciones

Definición 2.1. *Sea (M, D) una variedad con una distribución diferenciable. Una estructura de variedad casi-compleja adaptada a D es un cuarteto (M, D, J, g), donde g es una métrica, J es una estructura casi-compleja en D, y J es $g_{|D}$-antisimétrica. D ha de ser por tanto de dimensión par.*

En lo que sigue y siempre que no haya riesgo de confusión omitiremos la referencia a D como dato de partida , llamando al cuarteto (M, D, J, g) una variedad casi-compleja.

La g-antisimetría de J es usada para definir una métrica hermitiana a lo largo de D mediante la fórmula $h(\cdot,\cdot) = g(\cdot,\cdot) + ig(\cdot, J)$.

En general D puede tener cualquier dimensión pero para nosotros, y de ahora en adelante, D tendrá codimensión 1 o D será todo el tangente (en cuyo caso haremos mención explícita). Las definiciones que vamos a dar extienden aquellas de D. Auroux [4] para variedades casi-complejas de dimensión par. También en el caso impar impondremos compacidad en M (no así en el par). Salvo que digamos lo contrario, de ahora en adelante siempre que nos refiramos a una variedad casi-compleja ésta será impar.

2.1. Álgebra lineal de variedades casi-complejas

Sea V un espacio vectorial y D un subespacio de codimensión 1 dotado de una estructura casi-compleja J. Estamos interesados en estudiar fundamentalmente los espacios de r-formas en V que no son triviales cuando se las restringe a D.

Denotemos mediante $p\colon V^* \to D^*$ a la proyección canónica. En V^* tenemos el subespacio unidimensional $\mathrm{Ann}(D)$, que es el núcleo de p. Consideremos $V^*_{D\neq 0}$, el complementario de $\mathrm{Ann}(D)$ en V^* al que le añadimos el 0 ($V^* = \mathrm{Ann}(D) \cup V^*_{D\neq 0}$, $\mathrm{Ann}(D) \cap V^*_{D\neq 0} = \{0\}$).

Podemos considerar igualmente el subconjunto $V^*_{\mathbb{C},D\neq 0}$ en la complexificación $V_{\mathbb{C}}$, que contiene a los subconjuntos $V^{*1,0}_{D\neq 0}$, $V^{*0,1}_{D\neq 0}$ formados por 1-formas cuya restricción a D es (lineal) compleja y (lineal) anticompleja respectivamente, y cuyo único elemento comun es 0. Otro modo de definir estos subconjuntos es como la intersección de $V^*_{\mathbb{C},D\neq 0}$ con las imágenes inversas de $D^{*1,0}$ y $D^{*0,1}$ respectivamente (mediante p).

Usamos la notación $V^{*\otimes r} := V^* \otimes \overset{(r)}{\cdots} \otimes V^*$, $V^{*\odot r} := V^* \odot \overset{(r)}{\cdots} \odot V^*$ para el producto simétrico, y $\wedge^r V^*$ para el antisimétrico. De nuevo estamos sólo interesados en las formas que no se anulan en D. Es decir, consideremos la proyección obvia $p^r\colon V^{*\otimes r} \to D^{\otimes r}$ y llamemos a su núcleo $\mathrm{Ann}^r(D)$. A la unión de su complementario con el 0 la denotamos mediante $V^{*\otimes r}_{D\neq 0}$. Podemos definir un par de subconjuntos $V^{*\odot r}_{D\neq 0}$ y $\wedge^r V^*_{D\neq 0}$ de r-formas simétricas y antisimétricas respectivamente, que por definición son la imagen inversa en $V^{*\otimes r}_{D\neq 0}$ de $D^{*\odot r}$ y $\wedge^r D^*$. Si complexificamos, cada subconjunto $V^{*\otimes r}_{\mathbb{C},D\neq 0}$ (resp. $\wedge^r V^*_{\mathbb{C},D\neq 0}$) admite a su vez otros subconjuntos (con intersección el 0) de acuerdo con los tipos determinados por la estructura casi-compleja.

Asociadas a variedades calibradas definiremos secciones σ, por ejemplo de los fibrados $D^*_{\mathbb{C}}$, y estaremos interesados en tomar derivadas covariantes de las mismas. Lo lógico es usar la derivada de Levi-Civita en T^*M asociada a la métrica. Para ello, lo razonable es asignar a σ una sección de $T^*_{\mathbb{C}}M$, que necesariamente estará en $T^*M_{\mathbb{C},D\neq 0}$, y derivar esta última. Por supuesto, el resultado dependerá del levantamiento elegido.

Una manera de elegir estos levantamientos es seleccionar una retracción $i\colon D^* \to V^*$ para p, que de modo canónico define también retracciones para p^r. Si en V hay definida una métrica, asociada a ésta se tiene una retracción $\bar{i}$ cuya imagen denotamos mediante $\bar{D}^*$ (las formas anulándose en el ortogonal a D, que denotamos mediante $\langle \frac{\partial}{\partial s} \rangle$).

Sea $\tilde{i}$ cualquier otra retracción, cuya imagen denotamos mediante $\tilde{D}^*$. De modo natural se tienen retracciones $\bar{i}^r, \tilde{i}^r$ para p^r.

Partiendo de la descomposición $V^* = \bar{D}^* \oplus \mathrm{Ann}(D)$, $\tilde{D}^*$ se puede representar como el grafo de una aplicación lineal $l\colon \bar{D}^* \to \mathrm{Ann}(D)$, ($\tilde{D}^* = (I + l)(\bar{D}^*)$), y una cota para la norma de l vendrá dada por un cota inferior para el ángulo $\angle(\tilde{D}^*, \mathrm{Ann}(D))$. A su vez, l induce una aplicación $l^r\colon \bar{D}^{*\otimes r} \to \mathrm{Ann}^r(D)$ tal que $(I + l^r)(\bar{D}^{*\otimes r}) = \tilde{D}^{*\otimes r}$.

Para los subespacios vectoriales $\bar{D}^{*\otimes r}$ y $\tilde{D}^{*\otimes r}$ y sus complexificaciones podemos definir los subespacios de formas simétricas y antisimétricas como su intersección los conjuntos $V^{*\odot r}_{D\neq 0}$ y $\wedge^r V^*_{D\neq 0}$, o equivalentemente como las formas en estos subespacios que restringidas a D son simétricas y antisimétricas respectivamente. Lo mismo podemos hacer en las complexificaciones para definir los subespacios asociados a los tipos que define la estructura casi-compleja en D. En cualquier caso, mencionamos que la restricción de p^r a $\bar{D}^{*\otimes r}$ y $\tilde{D}^{*\otimes r}$ (y sus complexificaciones), las inclusiones $\bar{i}^r, \tilde{i}^r$, y la aplicación $I + l^r\colon \bar{D}^{*\otimes r} \to \tilde{D}^{*\otimes r}$ preservan todos estos subespacios.

Insistimos en que las componentes respecto de ambas descomposiciones están relacionadas por la aplicación lineal $I+l^r$. Por ejemplo si $\alpha \in T^*M$, denotamos a su proyección en D^* por $\alpha_{|D}$ (evaluación en D), a su componente en $\bar{D}$ mediante α_D, y la parte en $\tilde{D}$ por $\alpha_{\tilde{D}}$. Para calcular $\alpha_{\tilde{D}}$ a partir de α_D de modo explícito, consideramos una 1-forma ds que se anule en D y valga 1 sobre un vector $\frac{\partial}{\partial s}$ ortogonal a D. A continuación elegimos un vector $v_k \in D$ tal que $\tilde{D} = \mathrm{Ann}(\frac{\partial}{\partial s} + v_k)$. Es fácil comprobar que $\alpha_{\tilde{D}} = \alpha_D - \alpha(v_k)ds$ (resp. $\alpha^{1,0}_{\tilde{D}} = \alpha^{1,0}_D - \alpha^{1,0}_D(v_k)ds$, $\alpha^{0,1}_{\tilde{D}} = \alpha^{0,1}_D - \alpha^{0,1}_D(v_k)ds$).

Es claro pues que la cota para la norma de l implica la existencia de una constante κ positiva tal que:

- $|\alpha_D| \leq |\alpha_{\tilde{D}}|$, $|\alpha^{*1,0}_D| \leq |\alpha^{1,0}_{\tilde{D}}|$, $|\alpha^{*0,1}_D| \leq |\alpha^{0,1}_{\tilde{D}}|$.
- $|\alpha_{\tilde{D}}| \leq \kappa|\alpha_D|$, $|\alpha^{1,0}_{\tilde{D}}| \leq \kappa|\alpha^{*1,0}_D|$, $|\alpha^{0,1}_{\tilde{D}}| \leq \kappa|\alpha^{*0,1}_D|$.

También hacemos notar que para $\beta \in V^{*\otimes r}_{\mathbb{C}}$, existe un modo explícito para calcular $\beta_{\tilde{D}}$ en función de β_D sin más que generalizar la construcción citada para $r = 1$.

2.2. Fibrados muy amplios

Para controlar las propiedades geométricas de D, en principio localmente, pero como más tarde se verá globalmente, vamos a pedir la existencia de una 2-forma cerrada que la domine. Siendo más concretos, dicha forma será la curvatura de un fibrado de línea hermitiano. Cuando $D = TM$ éste es el concepto de fibrado amplio ya discutido en [4] y que pasamos a generalizar al caso impar del modo natural.

Definición 2.2. [3] *Dados c, δ números reales positivos, un fibrado de línea hermitiano con conexión unitaria (L, ∇) sobre (M, D, J, g) es (c,δ)-D-amplio (o simplemente amplio) si su curvatura F verifica que $iF(v, Jv) \geq cg(v, v)$, $\forall v \in D$ (y por tanto es no degenerada y un elemento de $\wedge^2 T^*M_{\mathbb{C},D\neq 0}$), y $|F_{|D} - F^{1,1}_{|D}|_g \leq \delta$, donde la norma usada es la del supremo.*

Una secuencia (L_k, ∇_k) de fibrados de línea hermitianos con conexión unitaria es asintóticamente muy amplia (o simplemente muy amplia) si existen constantes fijas δ, $(C_j)_{j\geq 0}$ y una secuencia $c_k \to \infty$, tal que a partir de un cierto natural K, las curvaturas F_k verifican:

(1) $iF_k(v, Jv) \geq c_k g(v, v), \forall v \in D$

(2) $|F_{k|D} - F_{k|D}^{1,1}|_g \leq \delta c_k^{1/2}$
(3) $|\nabla^j F_k|_g \leq C_j c_k$,

Observación 2.3: Como $iF_k \in \wedge^2 T^* M_{\mathbb{C},D\neq 0}$, prácticamente queda determinada por su restricción a D. Al tener D codimensión 1, existe necesariamente un subespacio $\ker F_k$ de dimensión 1 transverso a D, tal que si $R_k \in \ker F_k$, $F_k(R_k, \cdot) = 0$.

De ahora en adelante denotaremos mediante $\tilde{i}$ a la retracción asociada a $\ker F_k$, a la que también llamaremos retracción asociada a las curvaturas o a $\omega_k := iF_k$. Su imagen será denotada por $\tilde{D}^*$ (las retracciones cambian con k, pero omitimos dicha dependencia en la notación). Recordamos que $\bar{i}$ sigue siendo la retracción asociada a la métrica. Es evidente que $iF_k = iF_{k,\tilde{D}}$. Así, la condición $|iF_{k|D} - iF_{k|D}^{1,1}|_g \leq \delta c_k^{1/2}$ es equivalente a que para la descomposición $iF_{k,\tilde{D}} = iF_{k,\tilde{D}}^{2,0} + iF_{k,\tilde{D}}^{1,1} + iF_{k,\tilde{D}}^{0,2}$, las normas $|iF_{k,\tilde{D}}^{2,0}|_g, |iF_{k,\tilde{D}}^{0,2}|_g$ estén mayoradas por $O(c_k^{1/2})$. Tal y como vimos en el apartado 2.1, esto es equivalente a que para cualquier retracción i, las componentes $(0,2)$ y $(2,0)$ de la proyección de la curvatura en $i(D_{\mathbb{C}}^*)$ a lo largo de $\mathrm{Ann}(D)$ sean de ese mismo orden. En particular, este será cierto para la descomposición asociada a la métrica.

Si seleccionamos una familia diferenciable de cartas los cálculos anteriores pueden hacerse usando la métrica euclídea en el dominio de dichas cartas; el resultado son la misma clase de cotas pero con constantes $c_k' = Cc_k$, $C > 0$.

El verdadero significado de las cotas anteriores se comprende tras reescalar la métrica g definiendo la familia $g_k := c_k g$ (o equivalentemente contrayendo las cartas por el factor $c_k^{-1/2}$). Se obtienen cotas $iF_k(v, Jv) \geq g_k(v,v)$, $\forall v \in D$, $|F_{k|D} - F_{k|D}^{1,1}|_{g_k} \leq \delta c_k^{-1/2}$, $|\nabla^j F_k|_{g_k} \leq C_j c_k^{-1/2}$, donde las constantes se transforman en $C_j C c_k'^{-1/2}$ en las cartas reescaladas si usamos la métrica euclídea (en realidad las cotas son mejores en (3) pues $\nabla^r(iF_k)$ es una $(r+2)$-forma, pero el exponente $-\frac{1}{2}$ será suficiente para nuestros propósitos).

En las aplicaciones el punto de partida es una variedad calibrada de clase entera con una estructura casi-compleja J compatible. Se usa la 2-forma cerrada ω que domina para definir el fibrado precuantizable (L, ∇) cuya curvatura es $-i\omega$. Dicho fibrado es $(1,0)$-amplio y sus potencias tensoriales $L^{\otimes k}$ definen una sucesión de fibrados de línea muy amplia.

Para variedades calibradas (impares), al ser la secuencia de curvaturas proporcional los núcleos coinciden y por tanto la escisión $TM = D \oplus \ker F_k$ no depende de k. Ello nos permite definir la métrica g usando ω y J a lo largo de D, y declarando el núcleo de ω como ortogonal a D. En el caso general esta secuencia de núcleos no tiene por qué ser ortogonal a D (esto último no es necesario para que la teoría funcione).

Pese a que nuestra elección de retracción es la asociada a la métrica, para llevar a cabo construcciones locales no tiene tan buenas propiedades como la asociada a las curvaturas (al menos a primera vista). Esta última retracción ha de considerarse un elemento auxiliar pues las nociones a las que da lugar no son tan naturales como las asociadas a la de la métrica. Es necesario añadir en este punto que diferentes retracciones darán lugar a diferentes nociones de sucesiones de secciones A.H., con lo que puede ocurrir que determinadas escisiones den lugar a teorías "ricas" (con muchas secciones A.H.) mientras que para otras escisiones no podamos concluir lo propio. Veremos que en el caso de las escisiones asociadas a la métrica y las curvaturas, las correspondientes teorías A.H. resultarán ser *fuertemente equivalentes* (lema 3.30).

2.3. La teoría relativa

Además de la teoría intrínseca para variedades calibradas es posible desarrollar una teoría similar usando una construcción relativa para variedades simplécticas. Para ello es necesaria una generalización de ciertos elementos de la teoría simpléctica que permiten dar un tratamiento especial a parte de las direcciones holomorfas, y con la que se logrará reducir el problema al teorema de transversalidad relativa local de J.-P. Mohsen [**43**]. Dicha generalización será parte del contenido de la presentente sección, así como de las secciones 4, 5 y 6.

Ambas teorías tienen como corolario los mismos resultados geométricos, pero las complicaciones técnicas de la intrínseca son mucho mayores. Una segunda ventaja de la teoría relativa en la que no profundizaremos en esta tesis, es que posibilita construcciones relativas para (M, N, ω), donde (M, ω) es una variedad simpléctica cerrada de tipo entero y N es o bien una subvariedad simpléctica, o bien una subvariedad calibrada (por ω).

Definición 2.4. *Una polarización de una variedad casi-compleja (M, D, J, g) es una distribución J-compleja $G \subset D$. En tal situación hablamos de una variedad casi-compleja polarizada.*

Aunque la teoría que desarrollaremos es válida para cualesquiera variedades casi-complejas polarizadas, siempre que nos refiramos a éstas asumiremos que tienen dimensión par. El lector interesado podrá comprobar fácilmente la validez de esta afirmación.

Las variedades calibradas (M, D, ω, J) (en principio co-orientadas) pueden ser "simplectizadas" de modo no canónico (usando por ejemplo una métrica sí es canónico). Para ello elegimos una 1-forma β cuyo núcleo sea D. En $M \times [-1,1]$ definimos $\Omega = \omega + d(t\beta)$, donde ω (resp. β) es el pullback de la 2-forma (resp. 1-forma) en M, y t la coordenada en $(-1,1)$. Se comprueba que Ω es no degenerada en $M \times [-\epsilon, \epsilon]$. Extendemos J de modo que envia el vector unitario ortogonal a D con orientación positiva a $\frac{\partial}{\partial t}$, y haciéndolo independientemente de la coordenada t. Igualmente, D se extiende a una polarización de codimensión 1 (compleja) independiente de t, y g a una métrica para la que $\frac{\partial}{\partial t}$ es ortogonal a $M \times \{t\}$ (conservamos la notación original para las extensiones). De hecho esta métrica sólo es adaptada en $M \times \{0\}$, pero verifica $\Omega(v, Jv) \geq ag(v, v)$ para cierta constante $a > 0$, lo cual es suficiente para nuestros propósitos. El fibrado tangente de $M \times [-1,1]$ es suma directa de los subfibrados complejos D y $D^{\perp}$, donde la perpendicularidad se refiere o bien a la métrica extendida o bien a la métrica hermitiana inducida (pues la extensión de J es g antisimétrica).

Si lo que tenemos es una sucesión $(L_k, \nabla_k) \to (M, D, J, g)$ de fibrados muy amplia, con la extensiones citadas de J y g, haciendo pullback de la sucesión L_k a $M \times [-1,1]$ y usando las conexiones $\hat{\nabla}_k := \nabla_k + it\beta_k$, con $\beta_k := c_k\beta$ (siendo más estrictos consideramos el pullback de (L_k, ∇_k) y se tensoriza con el fibrado trivial con forma de conexión $it\beta_k$), obtenemos una sucesión de fibrados muy amplia. En realidad, de los tres términos de la curvatura $-F_k$, $idt \wedge \beta_k$, $itd\beta_k-$ es este último el que nos obliga a trabajar para cada k en la variedad $M \times [-\epsilon_k, \epsilon_k]$, con $\epsilon_k := c_k\epsilon$ (pues en esa región tiene g-norma de orden $c_k^{1/2}$). Siendo precisos es necesario –al menos para la construcción inicial de secciones de referencia– trabajar para todo k en un entorno fijo de la forma $M \times [-\epsilon, \epsilon]$; en dicha construcción la condición (2) de la definición 2.2 sólo se emplea en el punto en donde la carta está centrada, dónde sí se verifica.

Por tanto, vemos que a partir de una sucesión muy amplia de fibrados de línea sobre una variedad casi-compleja impar (M, D, J, g) podemos asociar (de modo canónico) una sucesión muy amplia de fibrados de línea sobre una sucesión de variedades casi-complejas pares polarizadas $(M \times [-\epsilon_k, \epsilon_k], J, g, D)$ (ó $M \times [-\epsilon, \epsilon]$, según lo que queramos obtener).

3. Teoría local: Modelos locales, cartas adaptadas y secciones de referencia

3.1. El modelo local

En el caso de dimensión par (y sin polarización), el modelo de referencia es el de los fibrados de línea positivos sobre variedades Kähler, y la filosofía general es que cualquier desviación del modelo Kähler local cuyo tamaño – una vez se reescala con factor $c_k^{-1/2}$ y empleando la métrica euclídea en una bola euclídea de radio $O(1)$– es menor que $O(c_k^{-1/2})$, todavía hace posible la construcción de "suficientes" secciones aproximadamente holomorfas. La primera desviación y más esencial es la de la estructura casi-compleja.

Sin ser muy precisos de momento diremos que una sucesión de secciones de un determinado fibrado o, más generalmente, otros objetos como distribuciones, satisfacen una propiedad en el sentido aproximado, si para todo k mayor o igual que algún K la desviación a la hora de cumplir dicha propiedad (normalmente dada en términos de una igualdad) es, medida en la métrica g_k, a lo sumo del orden $O(c_k^{-1/2})$. Es posible también hablar de propiedades locales en el sentido aproximado. En particular para una elección de cartas coordenadas centradas en cada punto, podemos elegir en cada carta "modelos locales" con los que comparar. Un ejemplo de la citada situación es el de una estructura casi-compleja arbitraria J (pensada como sucesión constante). Si se la compara en cartas adecuadamente elegidas con una integrable J_0, resultará estar a distancia menor de $O(c_k^{-1/2})$ (medida del modo adecuado), y por tanto diremos que es *aproximadamente integrable.*

Otra desviación permitida es considerar conexiones cuya curvatura es aproximadamente de tipo $(1,1)$ (la condición (2) en la definición 2.2, que ya aparece en [**3**]). En realidad como en el caso integrable dar una conexión unitaria con curvatura de tipo $(1,1)$ es equivalente a poner una estructura compleja integrable en el espacio total del fibrado, una vez que se permite integrabilidad aproximada en la base parece razonable debilitar también los requerimientos para el espacio total.

En el caso de dimensión impar el modelo global (es decir, la situación en la que J, D son integrables) es una variedad con una foliación por hojas complejas de codimensión (real) uno. Es más, realmente es suficiente con un modelo local. Para él pedimos la existencia de cartas $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ adaptadas a la foliación en las que la estructura compleja en las hojas $\mathbb{C} \times \{s\}$ es integrabe y constante con respecto a la coordenada real o coordenada vertical. En cuanto al fibrado de línea la curvatura de la conexión tiene que ser positiva en cada hoja y ha de definir, en las cartas anteriores, una estructura compleja integrable constante en la coordenada vertical (usando una trivialización adecuada del fibrado); dicho de otro modo, la curvatura tiene que ser de tipo $(1,1)$ e independiente de la coordenada vertical.

Análogamente al caso par podemos permitir estructuras casi-complejas que sean integrables y e independientes de la coordenada real en el sentido aproximado, e igualmente conexiones con curvaturas aproximadamente de tipo $(1,1)$. Pero al igual que ocurre con las estructuras casi-complejas, toda distribución $D \subset TM$ (pensada como sucesión constante) es aproximadamente integrable, i.e., para una elección de cartas apropiadas y una foliación modelo adecuada, la distancia entre D y la foliación modelo es de orden $O(c_k^{-1/2})$. Por tanto tiene sentido considerar distribuciones D en vez de foliaciones. En realidad hay un punto delicado que conviene clarificar. Si pretendemos obtener una teoría análoga a la de dimensión par pero foliada, en el modelo local integrable sólo nos interesa que la restricción a cada hoja de la curvatura sea de tipo $(1,1)$ y que no dependa de la coordenada vertical s. Por los resultados del apartado 2.1, las dos condiciones citadas equivalen a que para cualquier retracción independiente de la coordenada vertical, la correspondiente proyección de la curvatura tenga estas dos propiedades. Dicho de otro modo, en nuestro modelo no es estrictamente necesario que la dirección vertical generada por $\frac{\partial}{\partial s}$ esté en el núcleo de la curvatura, i.e., no es problemático que la curvatura tenga componente vertical (la que incluye al factor ds) no nula. Aun así, reiteramos que disponer de esta última propiedad es muy conveniente para los cálculos locales

Un último modo de resumir lo anterior es decir que la teoría impar local modelo es una teoría foliada que no lleva asociada la elección de una distribución unidimensional transversa.

En presencia de una polarización $G \subset TM$, el correspondiente modelo sería el ya descrito pero con una foliación holomorfa suplementaria $\mathcal{G}$ cuyo ortogonal hermitiano es también integrable, con cartas locales de modo que $\mathbb{C}^n$ descompone como $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^{n-g}$, correspondiendo a las foliaciones $\mathcal{G} \times \mathcal{G}^{\perp_h}$, y verificándose que la estructura compleja restringidas a las hojas de $\mathcal{G}$ no dependen de las coordenadas distinguidas $z^{g+1}, ..., z^n$ (y que la curvatura es positiva en las hojas de $\mathcal{G}$).

Por lo dicho anteriormente sobre la integrabilidad aproximada de cualquier distribución, es lógico que en la definición de variedad casi-compleja polarizada G pueda ser una distribución casi-compleja cualquiera.

Es necesario hacer notar que la teoría relativa se aplicará a variedades casi-complejas pares con sucesiones de fibrados (en principio de línea) muy amplios. Las polarizaciones serán un elemento auxiliar a las que se asociará otras sucesiónes de fibrados muy amplios. Para poder encontrar aplicaciones de la teoría en estos fibrados necesitaremos ciertas descripciones locales que incluyen a la polarización.

Definición 3.1. *El modelo Kähler, o plano, o integrable es el dominio* $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ *con coordenadas* $\{z^1, ..., z^n, s\}$, *con la estructura compleja* J_0 *standard a lo largo de las hojas y la métrica euclídea* g_0. *En cuanto al fibrado de línea, tiene que admitir una trivialización unitaria de modo que la forma de conexión tenga la expresión* $A_0 = \frac{1}{4}(\sum_{j=1}^n z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j)$. *En tal situación la curvatura es* $-i\omega_0 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j$ *(!no su restricción a cada hoja!) y su núcleo por tanto es la dirección vertical. La métrica euclídea está determinada en cada hoja pues* $g_0(\cdot,\cdot) = \omega_0(\cdot, J_0)$ *(y el ortogonal a la distribución horizontal viene dada por* $\ker\omega_0$*). La foliación holomorfa con hojas* $\mathbb{C}^n \times \{s\}$ *es llamada foliación horizontal y se denota por* D_h.

Si hay una polarización se pide una descomposición $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^{n-g}$

Para una sucesión $c_k \to \infty$ *el modelo reescalado es aquel con la misma carta y estructura compleja, métrica* $g_k = c_k g_0$ *y forma de conexión* $A_k = c_k A_0$. *Se comprueba que la contracción del dominio con factor* $c_k^{-1/2}$ *lleva el modelo plano en el modelo reescalado.*

Notamos que en nuestro modelo Kähler pedimos una condición para ω, y no para su restricción a las hojas. Podríamos haber considerado una definición más débil tomando la 2-forma foliada, e incluso considerar en vez de 2-formas cerradas globales, 2-formas foliadas cerradas. Localmente no hay problema en proceder así, pero sí globalmente: para una 2-forma foliada cerrada no existe fibrado precuantizable en el que buscar secciones aproximadamente holomorfas (en realidad hay un tipo de estructuras de Poisson para las que sí hay fibrado, pero no forma de conexión cuya curvatura sea a lo largo de las hojas la estructura de Poisson).

Tendría sentido debilitar la condición relativa a la curvatura si pudiésemos lograr así otra propiedad interesante. Por ejemplo hacer que la dirección vertical fuese la ortogonal a la distribución para la métrica inicial g; pero esto no es posible lograrlo en general mientras que sí seremos capaces de obtener cartas muy parecidas al modelo local descrito.

3.2. Cartas adaptadas, cartas r-comparables e igualdades en el sentido aproximado

Un elemento esencial de la teoría es mostrar la existencia de cartas y trivializaciones de L_k que coinciden aproximadamente con el modelo plano. También es necesario dar una definición más precisa de lo que es una sucesión aproximadamente plana de objetos (secciones, distribuciones,...).

En primer lugar trataremos el caso del espacio base (M, D, g) sin referencia alguna ni a la estructura casi-compleja ni a los fibrados. El motivo es que estamos interesados en encontrar determinadas cotas para una secuencia de secciones y sus derivadas covariantes, y pretendemos poder computarlas en dichas cartas usando la métrica y distancia euclídea, así como su derivada covariante asociada d (y también la escisión en coordenadas horizontales y vertical).

De hecho, podemos suponer como dato la sucesión de variedades riemannianas (M, D, g_k), con $g_k := c_k g$.

Definición 3.2. *Dada (M, D, g_k), una familia adaptada de cartas es un conjunto de aplicaciones $\psi_{k,x}\colon (\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}, 0) \to (U_{k,x}, x)$, para $(k, x) \in \mathbb{N} \times M$, que verifican:*

(1) $\psi_{k,x}^* D_x = D_h(0)$

(2) *Para k mayor que algún K, existen constantes $\gamma, \rho_0 > 0$, con $\frac{1}{\gamma} g_0 \leq g_k \leq \gamma g_0$, y tal que $|\nabla^j \psi_{k,x}^{-1}|_{g_k} \leq O(1)$ en $B_g(x, \rho_0 c_k^{1/2})$. En particular $\exists \rho > 0$ tal que $\frac{1}{\rho} d_k(x, y) \leq |z_k^i(y)| \leq \rho d_k(x, y)$, $\frac{1}{\rho} d_k(x, y) \leq |s_k(y)| \leq \rho d_k(x, y)$ en la misma bola, donde $z_k^1, ..., z_k^n, s_k$ son las funciones coordenadas para las cartas $\psi_{k,x}$. De ello se sigue en particular que $B_{g_k}(x, \frac{r}{\rho}) \subset \psi_{k,x}(B_{g_0}(0, r)) \subset B_{g_k}(x, \rho r)$, $r \in (0, c_k^{1/2})$.*

Las derivadas de $\psi_{k,x}^{-1}$ de la condición (2) en la definición 3.2 se computan usando la conexión de Levi-Civita asociada a g, y d_k es la distancia asociada a g_k.

El enunciado que relaciona la g_k-distancia y la norma (distancia g_0) implica que las medidas de una sección en una determinada bola $B_{g_k}(x, 2\rho)$ son –salvo una constante C_1 independiente de k y x– aquellas del pullback de la sección sobre la bola euclídea $B(0, 1)$ y usando g_0. La situación es similar para las derivadas covariantes. Las cotas en las derivadas covariantes de $\psi_{k,x}^{-1}$ (que a su vez equivalen a cotas en la derivada de $\psi_{k,x}^{-1}$ y en los símbolos de Christoffel y sus derivadas usuales en la carta) implican que cotas en norma C^r del pullback de la sección de orden $O(c_k^{-1/2})$ con respecto a la conexión plana d y medidas con g_0, son equivalentes a la misma clase de C^r-cotas para la sección usando la conexión de Levi-Civita asociada a g_k (ó g) y midiendo con la métrica g_k. Es más, para polinomios P_r, C^r-cotas de orden $P_r(d_k(x, y))O(c_k^{-1/2})$ en una bola de *g-radio fijo centrada en x* medidas usando la conexión de Levi-Civita asociada a g_k y la métrica g_k, son equivalentes a cotas $Q_r(|(z_k,s_k)|)O(c_k^{-1/2})$, donde Q_r es otro polinomio y las cotas se han obtenido para el pullback de la correspondiente sección *en una bola euclídea de radio* $O(c_k^{1/2})$ usando la métrica euclídea y la derivada d (es decir, todos los elementos métricos asociados al modelo plano).

Siempre se pueden encontrar cartas adaptadas. Basta hacerlo para $\psi_{1,x}$ (fijamos $c_1 = 1$ de modo que $g_1 = g$), lo cual es elemental: se construyen cartas dependiendo de modo diferenciable en x y haciendo que D coincida con D_h en el origen. Finalmente, se reescalan las cartas obteniendo coordenadas $z_k = c_k^{1/2}z$, $s_k = c_k^{1/2}s$.

El único punto a comentar es que para que las distancias asociadas a g y g_0 sean comparables no es necesario que las métricas coincidan en el origen. De hecho abundaremos en este tema en el próximo punto, en el que introducimos una clase de cartas con propiedades un tanto más débiles que las cartas adaptadas.

Cartas r-comparables. Como ya comentamos, las cartas adaptadas son una herramienta útil para hacer ciertas estimaciones usando la métrica y conexión euclídea. Dependiendo de las estimaciones que queramos hacer podemos estar interesados en garantizar la existencia de otro tipo de cartas.

Sea A un endomorfismo invertible del espacio euclídeo n-dimensional. Denotemos por $A(S^{n-1})$ el elipsoide imagen de la esfera unidad. Una norma vectorial para A viene definida por el máximo de las normas de los vectores en $A(S^{n-1})$ (la de su mayor singular), que denotamos mediante $||A||$. La norma de la inversa resulta ser $1/d(A(S^{n-1}),0)$.

Una acotación por una constante γ tanto para A como para su inversa será denotada mediante $\frac{1}{\gamma} \leq ||A|| \leq \gamma$. Lo cierto es que para acotar A inferior y superiormente basta encontrar una de las cotas para A y la otra para $\det(A)$, pues el determinante es el volumen del elipsoide (se pasa de una cota para la norma a otra para el determinante y viceversa usando ciertas funciones que sólo dependen de la dimensión).

En caso de tener una métrica g podemos escribir la correspondiente matriz A_g en términos de una base euclídea ortonormal $\{e_1,...,e_n\}$ ($A_{g,ij} = g(e_i,e_j)$).

Definición 3.3. *Definimos* $||g||$ *como la norma de* A_g *en una base euclídea ortonormal cualquiera. Se comprueba que la norma así definida no depende de la base elegida. La expresión* $\frac{1}{\gamma} \leq ||g|| \leq \gamma$ *será equivalente a* $\frac{1}{\gamma} \leq ||A_g|| \leq \gamma$ *(también usaremos* $\frac{1}{\gamma}g_0 \leq g \leq \gamma g_0$, *tal y como hicimos en el punto* (1) *de la definición 3.2).*

Se puede usar una noción diferente de norma para g tomando la norma euclídea de una transformación enviando una base g-ortonormal en una base euclídea ortonormal. De nuevo no depende de la elección de bases.

Es posible ir de cotas inferiores y superiores para una de las normas a la otra: si A_g es la matriz simétrica representando la forma bilineal g y Q una transformación enviando una base g-ortonormal a una euclídea ortonormal, se tiene $A = QQ^t$. Como consecuencia es suficiente relacionar una de las cotas y hacer lo propio con la otra mediante el determinante usando la relación $\det(A) = \det(Q)^2$.

Si miramos a las métricas como formas bilineales, otra noción de cotas inferiores y superiores para g es la existencia de una constante γ tal que $\frac{1}{\gamma} \leq g(v,v) \leq \gamma$, donde v es un vector de la esfera euclídea unitaria.

Estos tres modos de acotar una métrica inferior y superiormente son equivalentes en el sentido de que existen funciones dependiendo sólo de la dimensión del espacio que transforman cotas de una de las definiciones en cotas para cualquiera de las otras.

Definición 3.4. *Sea $(g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de métricas definidas en un entorno U_α del origen de $\mathbb{R}^n$. Se dice que la familia $(g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es comparable con la euclídea si existen números positivos γ, ρ_0 de modo que $B_{g_0}(0,\rho_0) \subset U_\alpha$ y $\frac{1}{\gamma}g_0 \leq g_\alpha \leq \gamma g_0$ en todo punto de $B_{g_0}(0,\rho_0)$ y para todo α.*

Para cualquier $r \in \mathbb{N}_+$, decimos que la familia es comparable con la euclídea a orden r si es comparable y la norma de los símbolos de Christoffel –computados con la base ortonormal paralela usual– y la de sus derivadas parciales hasta orden $r-1$ están acotadas por γ_r en todos los puntos de la bola $B_{g_0}(0,\rho_0)$ y para todo α.

Observación 3.5: En general para una variedad abierta fija, la existencia de cartas centradas en cada punto $x \in M$ de modo que el pull-back de g a cada carta de lugar a una familia de métricas g_x comparable a la euclídea no es automática. Una condición suficiente es la existencia de cotas globales para el tensor curvatura. La razón es que si por ejemplo se pretenden usar coordenadas normales, necesitamos información sobre la curvatura para entender la diferencial de la exponencial según nos alejamos del punto del que emana la carta.

La clase de familia que tenemos en mente es $\Lambda = \{x \in \coprod_{k\in\mathbb{N}} M_k\}$, donde (M_k, g_k) es una familia de variedades riemannianas. En particular, si $(M_k, g_k) = (M, c_k g)$, con M compacto, es fácil construir familias r-comparables de cartas (en este caso los requerimientos no son para todo (k,x) sino para todo (k,x) con k mayor que un cierto K).

La primera propiedad que nos interesa aquí es que para una familia de funciones f_α definidas en cartas r-comparables, cotas de orden $O(1)$ para $\nabla^{r-1}_{g_\alpha} f$ en $B_{g_0}(0,\rho_0)$ equivalen a cotas del mismo orden para las derivadas parciales de f_α hasta orden $r-1$. También para cartas comparables, tal y como indicamos al final del apartado anterior, podemos usar g ó g_0 indistintamente, e igualmente con sus distancias asociadas.

En segundo lugar y para $r \geq 1$, si tenemos un *subespacio lineal* $V \subset B_{g_0}(0,\rho_0)$ podemos comparar entornos tubulares de V para g y g_0. Y lo que es más importante, en estos entornos podemos comparar el transporte paralelo de V usando ambas métricas. El motivo es que dicho transporte está controlado por los símbolos de Christoffel; una cota para ellos nos permite estudiar cómo las geodésicas transversales a V difieren, y cuánto modifica V (como tangente al propio V en cada uno de sus puntos) el transporte paralelo a lo largo de las geodésicas según éstas evolucionan (de hecho a lo largo de curvas cuyas primeras y segundas derivadas tengamos controladas).

Retomamos nuestra variedad casi-compleja (M, D, J, g) y las cartas adaptadas.

Además de ser un instrumento útil para estimar tamaños, las cartas adaptadas nos permiten dar tanto una caracterización de igualdades/propiedades aproximadas, como una definición precisa cuando comparamos con modelos locales. Obsérvese que la definición dada al inicio del apartado 3.1 es válida cuando comparamos con objetos definidos globalmente pero no es del todo precisa cuando tenemos que comparar, por ejemplo, distribuciones en la variedad con otras distribuciones planas/integrables que sólo están definidas localmente usando cartas.

Nuestro objetos serán secciones de determinados fibrados. Más concretamente serán sucesiones de secciones de fibrados ortogonales o hermitianos, cuyo prototipo es la sucesión $E \otimes (F \otimes L_k)$, donde (L_k, ∇_k) es una sucesión muy amplia de fibrados de línea, (F, ∇) un fibrado hermítico arbitrario y E es un fibrado construido a partir de TM mediante complexificación, dualización, sumas directas, productos tensoriales, productos simétricos y antisimétricos (estos dos últimos en los factores asociados a T^*M). Podemos reemplazar E por el fibrado construido con las mismas operaciones pero empezando con D en vez de TM. De nuevo, como querremos estimar normas para sus derivadas necesitaremos verlo como un subfibrado de E; usaremos la notación E_D (resp. $E_{\tilde{D}}$) si usamos la escisión dada por la métrica (resp. las curvaturas) con la conexión obvia inducida por la de Levi-Civita. El subfibrado E_D (resp. $E_{\tilde{D}}$) tiene un subfibrado canónico complementario en E, sin más que considerar la correspondiente dirección complementaria a D en TM y $\mathrm{Ann}(D)$ en T^*M.

Un primer ejemplo es el tensor $J \in \Gamma(D \otimes D^*)$, donde la sucesión de fibrados es constante. Una vez extendido por ceros, dará lugar a los tensores $\bar{J}_k \in \Gamma(D \otimes \bar{D}^*) \subset TM \otimes T^*M$ (una sucesión que no varía con k) y $\tilde{J}_k \in \Gamma(D \otimes \tilde{D}^*) \subset TM \otimes T^*M$ (esta vez la sucesión sí varía con k). A la hora de tomar las sucesivas derivadas tenemos, en cada uno de los dos casos, dos opciones. La primera es ir tomando derivadas sucesivas (derivada en E), y la segunda es usar la correspondiente escisión para proyectar sobre el subfibrado correspondiente (paralelamente al complementario) y ahí tomar la siguiente derivada (derivada en E_D o en $E_{\tilde{D}}$). Los cuatro procesos dan normas diferentes, pero veremos que bajo una determinada condición –que nuestros tensores siempre cumplirán– las estimaciones que perseguimos serán equivalentes tanto para la derivada en E_D como para la derivada en E, y para ambas extensiones. Si no indicamos lo contrario usaremos la derivada en E.

Las sucesiones de tensores de fibrados E (resp. E_D o en $E_{\tilde{D}}$) vendrán asociadas a información de la variedad base (M, D, J, g), sin hacer referencia a sucesiones de fibrados amplias.

Un segundo ejemplo viene dado por una sucesión de secciones τ_k de L_k. Si derivamos, obtenemos $\nabla\tau_k \in \Gamma(T^*M \otimes L_k)$. Su restricción a D tendrá componente antiholomorfa que se puede ver como una sección de $D^{*0,1} \otimes L_k$.

Definición 3.6. *Sea E_k una sucesión de fibrados unitarios u ortogonales con conexión compatible ∇, y sea T_k una sucesión de secciones de los mismos.*

Se dice que T_k se anula en sentido aproximado (o que es aproximadamente nulo) hasta orden r, y se denota mediante $T_k \approxeq_r 0$, si para todo k mayor que un cierto K las siguientes desigualdades son satisfechas:

$$|\nabla^j T_k|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2}),\ j = 0, ..., r,$$

donde las derivadas de orden superior usan la conexión de Levi-Civita en T^*M.

Cuando la propiedad anterior es cierta para todo r hablamos de igualdad aproximada y lo denotamos por $T_k \approxeq 0$.

Observación 3.7: En primer lugar, observamos que si E_k es una sucesión constante E (resp. E_D o en $E_{\tilde{D}}$) como las descritas anteriormentes, una vez elegida una familia de cartas adaptadas el enunciado anterior es equivalente a

$$|\frac{\partial^{|p|}}{\partial x_k^p}(\psi_{k,x}^* T_k)|_{g_0} \leq O(c_k^{-1/2}),\ p = (p_1, ..., p_{2n+1}),\ |p| = p_1 + \cdots + p_{2n+1}, |p| \leq r,$$

en los puntos de $B_{g_0}(0, O(1))$ independientemente de k y x, donde $x_k^1, ..., x_k^{2n+1}$ son las coordenadas. Además si los tensores T_k son secciones del subfibrado E_D (resp. $E_{\tilde{D}}$), se puede dar una definición análoga usando la derivada covariante en E_D (resp. en $E_{\tilde{D}}$). Veremos más adelante que bajo ciertas condiciones que nuestros tensores siempre cumplirán ambas definiciones son equivalentes.

Usaremos familias de cartas adaptadas con propiedades adicionales.

Definición 3.8. *Una familia de cartas es adaptada a g cuando además de ser cartas adaptadas, el campo de vectores $\frac{\partial}{\partial s_k}$ genera el ortogonal a D.*

Similarmente, hablamos de cartas adaptadas a ω_k cuando $\frac{\partial}{\partial s_k}$ genera el núcleo de ω_k (para k suficientemente grande).

Es evidente que siempre se puede disponer de cartas adaptadas a g pues la escisión dada por la métrica no varía con k. Basta obtenerlas para $k = 1$ y reescalar.

Para demostrar la existencia de cartas adaptadas a ω_k es necesario ver cuál es la relación entre ambas escisiones. Dicha relación está codificada en las cotas impuestas en ω_k, que controlan la variación de $\ker \omega_k$. En cualquier caso recordamos que para variedades calibradas ambas coinciden.

Llamemos R_k a un vector g_k-unitario en el núcleo de ω_k. Dicho vector (salvo signo) será en principio local, si la variedad no es co-orientada. El dominio $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ de una carta $\psi_{k,x}$, por ejemplo adaptada a g, tiene una orientación natural definida mediante la de $\mathbb{C}^n$ más el campo local $\frac{\partial}{\partial s_k}$. Si (M, D, J, g) está orientada, se pueden tomar las cartas de modo que la anterior orientación local coincida con la de la variedad. Por tanto, en dicho caso R_k tendrá componente vertical positiva. En el no orientable, si queremos eliminar la ambigüedad elegimos R_k localmente con componente vertical positiva.

Lema 3.9. *La cota $|\omega_k|_{g_k} \leq O(1)$ implica que $\angle(\ker w_k, D) \geq \varepsilon > 0$, para k mayor que un cierto K.*

Las desigualdades $|\nabla^j \omega_k|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2})$, $j \geq 1$ implican $|\nabla^j R_k|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2})$, $j \geq 1$ (también para k mayor que un cierto K).

PRUEBA. Supongamos en primer lugar que la primera afirmación es falsa. Ello supondría para cualesquiera K y $\delta > 0$ la existencia de un punto $x_{k,\delta} \in (M, g_k)$, $k \geq K$, para el cual, si llamamos v_k a la proyección ortogonal de R_k sobre $D_{x_{k,\delta}}$, se tendría $|v_k|_{g_k} > 1 - \delta$ y $|v_k - R_k|_{g_k} < \delta$, lo que implicaría $\omega_k(v_k, Jv_k) \geq (1-\delta)^2$ y por tanto $\omega_k(v_k, Jv_k) = \omega_k(v_k - R_k, Jv_k)$, y $|\omega_k|_{g_k} > \frac{(1-\delta)^2}{(\delta \| J \|)}$.

En cuanto a la segunda afirmación, fijamos cartas adaptadas a g y $\{e_1, ..., e_{2n+1}\}$ una trivialización ortonormal de TM para la métrica g_k (e_{2n+1} es ortogonal a D), y tal que $|\nabla^r e_i|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2})$. Basta con trabajar en una bola de g_k-radio fijo.

Recordamos que puesto que ∇ es la conexión de Levi-Civita, $\nabla_X R_k$ es ortogonal a R_k.

$$\nabla\omega_k(R_k, e_i, \cdot) = d(\omega_k(R_k, e_i)) - \omega_k(\nabla R_k, e_i) - \omega_k(R_k, \nabla e_i) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\omega_k(\nabla R_k, e_i)|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2}).$$

Como $\nabla_X R_k$ está alejado del núcleo de ω_k, de las cotas para ω_k junto con el hecho de estar minorada en D por un múltiplo de la métrica se sigue la cota buscada para $|\nabla R_k|_{g_k}$. De hecho las cotas para $|\nabla^r \omega_k|_{g_k}$, para $|\nabla^j R_k|_{g_k}, 0 \leq j \leq r-1$ y la minoración por un múltiplo de la métrica, garantizan aquellas para la componente de $\nabla^r R_k$ ortogonal a R_k. En cuanto a la proporcional a R_k, se observa que de $0 = \nabla^r \langle R_k, R_k \rangle$ se puede concluir que su tamaño está medido en función de los productos interiores de la forma $\langle \nabla^s R_k, \nabla^t R_k \rangle$, $0 < s, t \;\; s + t = r$. □

De este resultado se sigue que podemos usar o bien la métrica g_k, o bien la métrica g_k restringida a D junto con R_k, y se obtienen cotas del mismo orden (son sucesiones de métricas comparables). En cálculos locales (para k suficientemente grande) se puede usar indistintamente las bases $\{e_1, \cdots, e_{2n+1}\}$ ó $\{e_1, \cdots, e_{2n}, R_k\}$, pues para ambas todos los campos locales tienen sus derivadas acotadas por $O(c_k^{-1/2})$. Es más, podemos conseguir cartas adaptadas a ω_k.

Antes es necesario dar una definición de proximidad entre distribuciones. Un modo natural es describir una distribución como el grafo de una aplicación de la otra en una coordenada transversa y estimar la norma de la aplicación. En nuestro caso, y para otros propósitos, queremos tener un concepto de proximidad entre distribuciones de dimensión diferente. Para ello recordamos los conceptos de ángulo máximo y mínimo empleados en [**46**].

Definición 3.10. *Sea W un espacio vectorial con producto interior de modo que se puede medir el ángulo $\angle(u,v)$ para vectores $u,v \in W$. Para $U \in Gr(p,W)$ y $V \in Gr(q,W)$ $p,q>0$, se define $\angle_M(U,V)$, el ángulo máximo de U con respecto a V, mediante la fórmula:*

$$\angle_M(U,V) \quad := \quad \max_{u\in U\setminus 0}(\min_{v\in V\setminus 0} \angle(u,v))$$

En general el ángulo máximo no es simétrico, pero cuando $p=q$ sí lo es y define una distancia en la correspondiente grassmanniana (see [**46**]).

El ángulo mínimo entre subespacios complementarios transversales se define como el ángulo mínimo entre dos vectores no nulos, uno en cada subespacio. Una extensión de esta noción para subespacios transversales con intersección no trivial es:

Definición 3.11. *(véase [**46**]) Con la notación de la definición 3.10, $\angle_m(U,V)$, el ángulo mínimo entre subespacios U y V no nulos, se define como sigue:*

- *Si $\dim U + \dim V < \dim W$, entonces $\angle_m(U,V) := 0$.*
- *Si la intersección no es transversa, entonces $\angle_m(U,V) := 0$.*
- *Si su intersección es transversa, consideramos el ortogonal a la intersección y sus intersecciones U_c y V_c con U y V respectivamente. Se define $\angle_m(U,V) := \min_{u\in U_c\setminus 0}(\min_{v\in V_c\setminus 0} \angle(u,v))$.*

El ángulo mínimo es simétrico.

La propiedad más importante relacionando ángulo máximo y mínimo es:

Proposición 3.12. *(Proposición 3.5 en [**46**]) Para subespacios no nulos U,V,W de $\mathbb{R}^n$ se tiene*

$$\angle_m(U,V) \leq \angle_M(U,W) + \angle_m(W,V).$$

Los subespacios se han de considerar orientados de modo que el ángulo máximo entre dos distribuciones diferenciables, con el signo apropiado, es una función diferenciable.

Lema 3.13. *Existen cartas adaptadas $\psi_{k,x}\colon (\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}, 0) \to (U_{k,x}, x)$ que envían el campo de direcciones verticales generado por $\frac{\partial}{\partial s_k}$ a $\ker w_k$.*

Prueba. Por el lema 3.9, existen $\varepsilon > 0$, $K \in \mathbb{N}_+$, tal que $\angle_m(\ker\omega_k, D) \geq \varepsilon$ para $k \geq K$. Se pueden elegir una cartas iniciales $\phi_{x,1}\colon (\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}, 0) \to (U_{k,x}, x)$ de modo que $\angle_M(D_h, D) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Aplicando la proposición 3.12 podemos deducir que $\angle_m(\phi_{1,x}^* \ker\omega_k, D_h) \geq \frac{\varepsilon}{2}$, para $k \geq K$. Definimos una primera familia de cartas adaptadas $\phi_{k,x}$ reescalando $\phi_{x,1}$.

Llamemos Φ_{x,R_k}^t al flujo de $\phi_{k,x}^* R_k$. Lo rectificamos mediante la aplicación

$$\begin{aligned} \chi_k\colon \quad \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} &\to \quad \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \\ (z_k, s_k) &\mapsto \quad \Phi_{R_k}^s(z_k, 0) \end{aligned}$$

El hecho de que $|R_k|_{g_k} = O(1)$ y $\angle_m(R_k, D_h) > \frac{\varepsilon}{2}$ implica que la aplicación está definida para cada x y k en una bola euclídea radio $r_1 c_k^{1/2}$ (o de g-radio fijo). Es más, es posible encontrar una constante γ para la cual $\frac{1}{\gamma} \leq |\chi_{k*}(z_k, s_k)| \leq \gamma$, de modo que se pueden comparar la métrica euclídea en el espacio de llegada con la métrica resultado de empujar la euclídea mediante la aplicación (y de modo similar hay cotas superiores para las restantes derivadas). En realidad se puede deshacer el reescalamiento y considerar, para cada k, la aplicación inducida $\Phi^t_{x, c_k^{1/2} R_k}$ en el dominio de la carta $\phi_{1,x}$. Estas aplicaciones fijan el origen y $D_h(0)$, y se tienen para todas sus derivadas covariantes cotas de orden $O(1)$, y por tanto dan lugar a cotas de orden $O(c_k^{-1/2})$ para la composición $\psi_{k,x} = \phi_{k,x} \circ \Phi^t_{x, c_k^{1/2} R_k}$. □

Una vez que contamos con cartas adaptadas para g (resp. ω_k) en las que la escisión $D_h \oplus \frac{\partial}{\partial s}$ corresponde prácticamente a la dada por D y la métrica (resp. ω_k), podemos dar la noción de igualdad aproximada para tensores locales. En realidad dicha noción es válida para cualquier familia de cartas adaptadas, pero como nuestros tensores locales estarán relacionados con D y sendas escisiones, en principio restringimos nuestra atención a este tipo de cartas.

También daremos la definición en principio para para sucesiones constantes de fibrados E (resp. E_D o $E_{\tilde{D}}$), pues los "modelos locales" con los que queremos comparar son relativos a los elementos geométricos de (M, D, J, g).

Definición 3.14. *Fijemos $\psi_{k,x}$ una familia de cartas adaptadas a la métrica (resp. las curvaturas). Sea T_k una sucesión de secciones de un fibrado E o de los subfibrados E_D (resp. $E_{\tilde{D}}$), y T otra sección local del fibrado correspondiente; esto quiere decir que usamos D_h y la escisión $D_h \oplus \frac{\partial}{\partial s}$ en vez de D y $D^\perp$ (resp. $\ker \omega_k$) en la definición local de E_D (resp. $E_{\tilde{D}}$). Las cartas dan trivializaciones canónicas (también de los subfibrados locales) y pedimos que T, definido en el dominio de $\psi_{k,x}$, tenga la misma expresión independientemente de k, x. T es por tanto el modelo local con el que queremos comparar.*

Se dice que T_k es igual a T en sentido aproximado (o aproximadamente igual a T) hasta orden r, y se denota mediante $T_k \approxeq_r T$, si para todo k mayor que un cierto K las siguientes desigualdades son satisfechas:

$$|\frac{\partial^{|p|}}{\partial x_k^p}(T - \psi_{k,x}^* T_k)|_{g_0} \leq P_r((z_k, s_k)) O(c_k^{-1/2}), \tag{3.1}$$

$p = (p_1, ..., p_{2n+1})$, $|p| = p_1 + \cdots + p_{2n+1}$, $|p| \leq r$, en $B_{g_0}(0, O(c_k^{1/2}))$ independientemente de k y x, donde también hemos usado la notación $z_k^i = x_k^{2i} + x_k^{2i+1}$, $s_k = x_k^{2n+1}$. En caso de que sólo queramos trabajar en $B_{g_0}(0, O(1))$, se pide el mismo tipo de desigualdad pero con $P_r = 1$ (la primera propiedad implica la segunda).

Cuando la propiedad anterior es cierta para todo r hablamos de igualdad aproximada y lo denotamos por $T_k \approxeq T$.

Hablaremos de planitud en el sentido C^r-aproximado cuando $T = 0$ (i.e., $T_k \approxeq 0$), o más generalmente cuando T, siendo un tensor local, es constante (paralelo con respecto a d, la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica euclídea).

Observación 3.15: Obsérvese que de nuevo podemos usar en vez de d (derivadas parciales usuales) la derivada covariante ∇ y g_k para dar la definición. Cuando trabajamos con secciones de los subfibrados E_D (resp. $E_{\tilde{D}}$) podemos dar otra definición usando la derivada restringida (que en cartas equivale a considerar d_{D_h} en vez de d, i.e., sólo las derivadas parciales con respecto a coordenadas horizontales); también veremos que las definiciones son equivalentes.

Observación 3.16: Es posible extender la noción de igualdad aproximada para sucesiones de secciones de $E \otimes (L_k \otimes F)$. Básicamente, necesitamos dar en cada punto trivializaciones (unitarias) de $L_k \otimes F$ de modo que el tensor T modelo venga descrito por una expresión local fija (por ejemplo $T = 0$). Igualmente es necesario acoplar la correspondiente matriz de 1-formas de conexión con las derivadas parciales en 3.1. Como el motivo último de usar modelos locales es simplificar los cálculos, lo lógico es tratar de elegir trivializaciones de modo que la matriz de formas de conexión sea independiente de k y x y fácil de manejar.

Una vez que se ha fijado una familia de cartas adaptadas (no necesariamente adaptadas a la métrica o curvaturas), que no son más que un elemento auxiliar en la teoría, la distancia entre D y D_h viene dada por una función diferenciable $\angle_M(D, D_h)$. Puesto que la función se anula en el origen, D es C^r-aproximadamente plana para todo r (o aproximadamente integrable).

Es importante mencionar que las nociones de planitud aproximada para tensores locales dependen de las cartas elegidas. También nótese que $T_k \approxeq_r T$ para una familia de cartas adaptadas es equivalente a $\phi_{k,x}^* T_k \approxeq_r T$, siempre que $\phi_{k,x} \colon (\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}, 0)$ satisfaga $\phi_{k,x} \approxeq_r I$ y $\phi_{k,x}^* D_h(0) = D_h(0)$. Por este motivo no solamente usaremos cartas adaptadas a la métrica (resp. curvaturas), sino también deformaciones del orden anterior de las mismas; si se quiere, cartas aproximadamente adaptadas a la métrica (resp. curvaturas) para las que $D \approxeq D_h$ y $D^\perp \approxeq \langle \frac{\partial}{\partial s} \rangle$ (resp. $\ker \omega_k \approxeq \langle \frac{\partial}{\partial s} \rangle$).

Como ya ha sido mencionado repetidas veces, esta teoría generaliza la situación en la que se comienza con una variedad calibrada y a partir de ahí se definen la estructura casi compleja compatible con ω J y la métrica g. Una consecuencia importante de este análisis es que secciones muy próximas a ser J-holomorfas dan lugar a subvariedades que cortan a D simplécticamente (a nivel lineal). Recordemos que para una retracción cualquiera i, por definición, una 1-forma $\Gamma \in i(D)^*_{\mathbb{C}}$ es J-holomorfa si su restricción a D lo es. La proximidad a ser casi-holomorfa querrá decir que la parte $(1,0)$ de la restricción es suficientemente grande comparada con la parte $(0,1)$ de la misma. Pero hemos visto que esto es equivalente a la misma aserción para las partes $\Gamma^{1,0} \in i(D)^{*1,0}_{\mathbb{C}}$ y $\Gamma^{0,1} \in i(D)^{*0,1}_{\mathbb{C}}$.

En efecto, para cualquier subespacio $N_x \subset D_x$, $J(N_x) \perp_g N_x^{\omega_{|D}}$ por lo que $J(N_x)$ suficientemente próximo a N_x hará que este último sea simpléctico. Esta proximidad viene gobernada por $|\Gamma^{0,1}|/|\Gamma^{1,0}|$. En la situación general, y tal y como ocurre para dimensión par, la misma relación puede ser recuperada; ser próximo a ser J-holomorfo supondrá simplecticidad con respecto a las formas ω_k. Para probarlo, se construyen estructuras casi-complejas compatibles J_k muy próximas a J. Para estos tensores, la C^0-proximidad es suficiente para nuestros propósitos. Pero es una característica propia de la teoría de variedades casi-complejas que todo lo que ocurre en los modelos locales (todas las propiedades) se verifica de modo aproximado para las primeras. Por una cuestión de completitud de la teoría probaremos también en el caso de los tensores J_k, J que la proximidad se da para cualquier orden.

De nuevo nos encontramos con el problema de cómo tomar derivadas de J_k. Por un lado podemos considerar las extensiones $\bar{J}_k$ o $\tilde{J}_k$ asociadas respectivamente a la métrica o a las curvaturas, y por otro podemos considerar derivadas totales o derivadas en el correspondiente subfibrado. En el próximo lema se citan condiciones bajo las que la ambigüedad en las extensiones y en el cómputo de las derivadas desaparece.

Para introducir la notación necesaria, recordamos que si T_k es una sucesión de tensores de un fibrado $E_{|D}$ asociado a D como en la definición 3.14, tenemos para las extensiones $\bar{T}_k \in \Gamma(E_D)$ (resp. $\tilde{T}_k \in \Gamma(E_{\tilde{D}})$) una derivada total $\nabla^r \bar{T}_k \in \Gamma(T^*M^{\otimes r} \otimes E)$ (resp. $\nabla^r \tilde{T}_k \in \Gamma(T^*M^{\otimes r} \otimes E)$), y una derivada en E_D, $\bar{\nabla}^j \bar{T}_k \in \Gamma(T^*M^{\otimes r} \otimes E_D)$ (resp. $\tilde{\nabla}^j \tilde{T}_k \in \Gamma(T^*M^{\otimes r} \otimes E_{\tilde{D}})$) para la que se compone con las proyecciones

$$\pi_r^D : T^*M^{\otimes r} \otimes E \to T^*M^{\otimes r} \otimes E_D$$

$$\pi_r^{\tilde{D}} : T^*M^{\otimes r} \otimes E \to T^*M^{\otimes r} \otimes E_{\tilde{D}}$$

Si trabajamos en cartas adaptadas, la proyección usada es $\pi_r^{D_h} : T^*M^{\otimes r} \otimes E \to T^*M^{\otimes r} \otimes E_{D_h}$. En todos los casos, la aplicación es la identidad en $T^*M^{\otimes r}$ tensorizada con la aplicación que proyecta paralelamente al subfibrado complementario asociado a la escisión correspondiente.

También consideramos el isomorfismo de fibrados $q_r^{D,\tilde{D}} : T^*M^{\otimes r} \otimes E \to T^*M^{\otimes r} \otimes E$ que es la identidad en $T^*M^{\otimes r}$ y en E es el isomorfismo que lleva E_D a $E_{\tilde{D}}$ inducido por el de $TM \to TM$ que es la identidad en D y lleva $D^\perp$ en $\ker \omega_k$ paralelamente a D, o equivalentemente por su dual de T^*M en T^*M que es la identidad en $\mathrm{Ann}(D)$ y lleva $\bar{D}$ en $\tilde{D}$ paralelamente a $\mathrm{Ann}(D)$.

En el caso de cartas adaptadas (a la métrica o curvaturas) se define $q_r^{D,D_h} : T^*M^{\otimes r} \otimes E \to T^*M^{\otimes r} \otimes E$ como la identidad en $T^*M^{\otimes r}$, y pidiendo que envíe E_{D_h} en E_D paralelamente al complementario común. De nuevo indicamos que es el isomorfismo inducido por el de TM que fija $\frac{\partial}{\partial s_k}$ y proyecta D_h verticalmente sobre D (o dualmente por el de T^*M fijando el hiperplano $\mathrm{Ann}(\frac{\partial}{\partial s_k})$ y proyectando paralelelamente a éste el fibrado real de líneas $\mathrm{Ann}(D_h)$ sobre $\mathrm{Ann}(D)$).

Las aplicaciones en las que interviene la descomposición asociada a las curvaturas dependen de k, dependencia que ha sido omitida en la notación.

Es evidente que las π_r^D tienen g_k-norma $O(1)$, y sus derivadas son de tamaño $O(c_k^{-1/2})$, pues son una sucesión constante. De las cotas para R_k y sus derivadas computadas en el lema 3.9, se infieren la misma clase de cotas para las $\pi_r^{\tilde{D}}$ y $q^{D,\tilde{D}}$. También $q_r^{D,D_h} \approxeq I$ (I es la aplicación identidad). Igualmente $\pi_r^D \approxeq \pi_r^{D_h}$, pues se pasa de una proyección a otra componiendo con q_r^{D,D_h}.

Es importante observar que en el caso integrable o plano, como D_h es paralela, la derivada en E y la derivada en E_{D_h} coinciden. En la situación no integrable una cota para la derivada en E_D no necesariamente implica el mismo tipo de cota para la derivada total. Aún así se tiene:

Lema 3.17. *Sea T_k una sucesión de tensores de $E_{|D}$ y sean $\bar{T}_k$ y $\tilde{T}_k$ las imágenes de T_k asociadas a las correspondientes inmersiones de $E_{|D}$ en E (nos referiremos a ellas también como las extensiones por ceros).*

En primer lugar, $|\nabla^j \bar{T}_k|_{g_k} \leq O(1)$, $\forall j \in \mathbb{N}$ si y solamente si $|\nabla^j \tilde{T}_k|_{g_k} \leq O(1)$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

Si la condición anterior se cumple entonces son equivalentes:

(1) $|\nabla^j \bar{T}_k|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2})$.
(2) $|\bar{\nabla}^j \bar{T}_k|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2})$.
(3) $|\nabla^j \tilde{T}_k|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2})$.
(4) $|\tilde{\nabla}^j \tilde{T}_k|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2})$.

La equivalencia anterior también se tiene para cotas de orden $O(1)$ en vez de orden $O(c_k^{-1/2})$.

PRUEBA. Primero consideramos el caso de tensores de E_D (la equivalencia entre las dos primeras aserciones). Por definición $\bar{\nabla}\bar{T}_k = \pi_1^D(\nabla \bar{T}_k)$. Queremos demostrar que tanto $|\nabla \bar{T}_k|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2})$ como $|\pi_1^D(\nabla \bar{T}_k)|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2})$ suponen que $\pi_1^D(\nabla \bar{T}_k) - \nabla \bar{T}_k$ es también a lo sumo de tamaño $O(c_k^{-1/2})$. Podemos ir a medir a cartas adaptadas a la métrica (basta considerar bolas de g_k-radio fijo).

Una de las implicaciones es inmediata. De la cota $O(1)$ para $\bar{T}_k$ y $\nabla \bar{T}_k$ se tiene que $(\pi_1^D \nabla \bar{T}_k - \nabla \bar{T}_k) - (\pi_1^D d\bar{T}_k - d\bar{T}_k)$ es de orden $O(c_k^{-1/2})$, pues de ellas se sigue una cota $O(c_k^{-1/2})$ para la diferencia $d\bar{T}_k - \nabla \bar{T}_k$. De hecho, usando todas las cotas $|\nabla^j \bar{T}_k|_{g_k} \leq O(1), \forall j \in \mathbb{N}$, se infieren cotas de orden $O(c_k^{-1/2})$ para todas las derivadas de la diferencia anterior (aquí sólo es necesario control de orden $O(1)$ para π_1^D y sus derivadas; también se usa que para tensores $F^{a,b}$, $G^{b,c}$, se tiene $\nabla G \circ F = \nabla G \circ F + G \circ \nabla F$).

De modo análogo, $(\pi_1^D d\bar{T}_k - d\bar{T}_k) - (\pi_1^{D_h} d\bar{T}_k - d\bar{T}_k)$ y todas sus derivadas son de tamaño $O(c_k^{-1/2})$ ya que $\pi_1^D \approxeq \pi_1^{D_h}$, y $d^j \bar{T}_k$, $\forall j \geq 1$, son a lo sumo de orden $O(1)$.

Luego la afirmación para la primera derivada es equivalente a la aseveración correspondiente para la diferencia $\pi_1^{D_h} d\bar{T}_k - d\bar{T}_k$.

Es importante resaltar que las cotas para todas las derivadas de orden superior de la expresión anterior sólo requieren una cota de orden $O(1)$ para $\nabla^j \bar{T}_k$ y las derivadas de las proyecciones. Sumando y restando $q_0^{D,D_h}(\bar{T}_k)$ a $\bar{T}_k$, el problema se reduce a encontrar las mismas cotas para $\pi_1^{D_h} dq_0^{D,D_h}(\bar{T}_k) - dq_0^{D,D_h}(\bar{T}_k)$ (de nuevo la diferencia es aproximadamente nula sin más que usar cotas $O(1)$ para $\nabla^j \bar{T}_k$ y las proyecciones y sus derivadas).

Llamemos $B_{k,1}$ a la diferencia $\nabla \bar{T}_k - \bar{\nabla} \bar{T}_k$. Por lo visto anteriormente $B_{k,1} \approxeq 0$. Luego $\nabla^2 \bar{T}_k - \nabla \bar{\nabla} \bar{T}_k \approxeq 0$. Por tanto para probar el caso $r = 2$ es suficiente estudiar la diferencia $\nabla \bar{\nabla} \bar{T}_k - \bar{\nabla}^2 \bar{T}_k$, pero esta prueba es la misma que la dada pero usando $\pi_2^D, \pi_2^{D_h}$ y q_1^{D,D_h}.

Para $\nabla^r T_k$ usamos las mismas ideas con las proyecciones $\pi_r^D, \pi_r^{D_h}$ y q_{r-1}^{D,D_h}, junto con el hecho de que $\nabla \nabla^{r-1} T_k - \nabla d^{r-1} T_k$ es de orden $O(c_k^{-1/2})$, y que $B_{k,r-1} = \nabla^{r-1} \bar{T}_k - \bar{\nabla}^{r-1} \bar{T}_k$ es aproximadamente nulo por inducción.

La equivalencia entre las afirmaciones tercera y cuarta se prueba exactamente igual.

Para finalizar se demuestra la equivalencia entre las afirmaciones primera y tercera, que es elemental por todo lo dicho ya que $\tilde{T}_k = q_0^{D,\tilde{D}}(\bar{T}_k)$.

La equivalencia para cotas de orden $O(1)$ se sigue de la prueba anterior.

□

Observación 3.18: Las ideas anteriores se pueden usar para probar el mismo tipo de resultado pero igualando a otro tensor que no sea el nulo (basta considerar la diferencia), o incluso a un tensor definido localmente en cartas adaptadas. También hacemos notar que cuando estamos probando una igualdad aproximada global, esto es, $T_k \approxeq_r T$, podemos utilizar una determinada familia de cartas adaptadas (en la que trabajaremos en bolas de g_k-radio fijo) y luego cambiar a otras para diferentes propósitos.

Aunque todavía no hemos introducido cartas adaptadas para polarizaciones G, será evidente que bajo condiciones adecuadas, tendremos similares resultados para tensores definidos en fibrados E_G.

Observación 3.19: Hacemos notar que para relacionar las cotas para las derivadas totales respecto de ambas retracciones (las afirmaciones primera y tercera), hemos usado en la composición con la aplicación $q_0^{D,\tilde{D}}$ las cotas para ésta. Dicha aplicación tiene derivadas de orden $O(c_k^{-1/2})$, pero para la prueba basta con cotas de orden $O(1)$.

Observación 3.20: El lema anterior es cierto porque en la situación integrable es una igualdad estricta. Esta clase de fenómeno aparecerá repetidas veces.

Cuando se tengan cualquiera de las cuatro condiciones equivalentes, abusando de la notación lo representaremos mediante $T_k \approxeq 0$.

Lema 3.21. *Dada una sucesión muy amplia de fibrados de línea sobre una variedad casi-compleja, se puede construir una sucesión de estructura casi-complejas J_k compatibles con las 2-formas ω_k y tal que $J_k \approxeq J$.*

PRUEBA. Vamos a definir directamente $\tilde{J}_k$, la extensión de J_k por ceros usando la escisión asociada a las curvaturas. Esto no es extraño pues en la propia definición de la sucesión de las estructuras casi-complejas compatibles intervienen las ω_k. No es ésta la única construcción en la que esta escisión será de utilidad.

Extendemos J y la identidad I a $\tilde{J}$ y $\tilde{I}$ (las extensiones dependerán de k). Denotemos por $\tilde{\omega}_k \colon TM \longrightarrow T^*M$ a las aplicaciones de fibrados inducidas por ω_k. La composición $\tilde{\omega}_k \circ (-\tilde{J})$ restringe a un morfismo positivo de D a D^*. Por tanto podemos simetrizarlo para obtener:

$$\begin{aligned} S_k(u,v) &= \tfrac{1}{2}\omega_k(u,Jv) + \tfrac{1}{2}\omega_k(v,Ju) = \\ &= \omega_k(u,Jv) + \tfrac{1}{2}(\omega_k(v,Ju) - \omega_k(Jv,J^2u)) = \\ &= \omega_k(u,v) + \tfrac{1}{2}Re(\omega_k^{0,2}(v,Ju)), \forall u,v \in D, \end{aligned}$$

una métrica en D a la que podemos ver como un morfismo de fibrados $\tilde{S}_k \colon TM \to T^*M$ (extendido trivialmente en $\ker \omega_k$). Consideramos $A_k = \tilde{S}_k^{-1} \circ \tilde{\omega}_k$ y definimos $\tilde{J}_k = Q_k^{-1} \circ A_k$, con $Q_k^2 = -A_k^2$, donde Q_k es g_k-autoadjunta; las inversas se toman a lo largo de las direcciones de D y se anulan en $\ker \omega_k$.

Para comprobar la desigualdad para el caso $r = 0$ observamos que los morfismos de fibrados $\tilde{\omega}_k \circ (-\tilde{J})$, $\tilde{S}_k \colon TM \to T^*M$ se encuentran, por construcción, a distancia $O(c_k^{-1/2})$. El hecho de que $\omega_k(v,Jv) \geq g_k(v,v)$, $\forall v \in D$, implica que sus inversos todavía se mantienen a distancia $O(c_k^{-1/2})$, y en consecuencia también $\tilde{J} = (\tilde{\omega}_k \circ (-\tilde{J}))^{-1} \circ \tilde{\omega}_k$ y A_k. Además,

$$|-A_k^2 - \tilde{I}|_{g_k} = |-A_k^2 - (-\tilde{J}^2)|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2}).$$

Ello implica que $|Q_k - \tilde{I}|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2})$. Si usamos cartas adaptadas a ω_k y diagonalizamos $-A_k^2$ (por ejemplo por el método de Gauss), se sigue que $-A_k^2 = G_k \circ \tilde{D}(\lambda_{1,k}, \ldots \lambda_{2n,k}) \circ G_k^{-1}$, donde $\tilde{D}(\lambda_{1,k}, \ldots \lambda_{2n,k})$ es la matriz diagonal $D(\lambda_{1,k}, \ldots \lambda_{2n,k}, 0)$, y tanto $|G_k - \tilde{I}|_{g_k}$ como $|\tilde{D}(\lambda_{1,k}, \ldots \lambda_{2n,k}) - \tilde{I}|_{g_k}$ son de orden $O(c_k^{-1/2})$. A partir de la última estimación obtenemos

$$|\tilde{D}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{1,k}}}, \ldots \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,k}}}\right) - \tilde{I}|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2}),$$

lo que da lugar a la misma cota para

$$Q_k^{-1} = G_k^{-1} \circ \tilde{D}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{1,k}}}, \ldots \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,k}}}\right) \circ G_k.$$

Finalmente, $|\tilde{J} - \tilde{J}_k|_{g_k} \leq |\tilde{J} - A_k|_{g_k} + |A_k - \tilde{J}_k|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2})$.

En cuanto a las derivadas se comprueba que $|\nabla^r(\tilde{\omega}_k \circ (-\tilde{J}) - \tilde{S}_k)|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2})$ se satisface trivialmente. El motivo es que el tensor está definido en términos de $\tilde{\omega}_k$ y $\tilde{J}$, y en la expresión anterior hemos de estimar un número acotado de sumandos cada uno de los cuales contiene al menos una derivada, o bien de $\tilde{\omega}_k$ o bien de $\tilde{J}$, junto con términos de orden a lo sumo $O(1)$. El control para las derivadas de $\tilde{J}$ es automático, ya que por el lema 3.17 equivalen a las de $\bar{J}$ que son triviales por ser ésta una sucesión constante.

Notamos que los inversos de los tensores se calculan en las direcciones de D y son nulos en la complementaria. Si estuviésemos trabajando en dimensión par las cotas para los inversos se seguirían de las de $\nabla^r(\tilde{\omega}_k \circ (-\tilde{J}) - \tilde{S}_k)$, y del hecho de que $\tilde{\omega}_k$ está acotado por debajo (y por tanto también $\tilde{S}_k$). En la situación impar si T es cualquier tensor anulándose en $\ker \omega_k$ (o $\mathrm{Ann}(D)$), y con inverso a lo largo de D (o $\tilde{D}^*$ si su dominio es T^*M), se tiene $T \circ T^{-1} = I \oplus 0 = \tilde{I}$, $T^{-1} \circ T = I \oplus 0 = \tilde{I}$, donde las identidades se dan en los espacios de llegada y salida de la restricción de T a D (o $\tilde{D}^*$), y se anulan a lo largo del complementario. Como $|\nabla^r \tilde{I}|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2})$ (por el mismo motivo que $\tilde{J}$), tenemos las fórmulas habituales para las derivadas covariantes de los inversos, salvo términos de orden $O(c_k^{-1/2})$. Por ejemplo, $\nabla(\tilde{\omega}_k(-\tilde{J}) \circ (\tilde{\omega}_k(-\tilde{J}))^{-1}) = \nabla(I \oplus 0)$ implica que

$$\nabla(\tilde{\omega}_k(-\tilde{J}))^{-1} = -(\tilde{\omega}_k(-\tilde{J}))^{-1} \circ \nabla\tilde{\omega}_k(-\tilde{J}) \circ (\tilde{\omega}_k(-\tilde{J}))^{-1} + (\tilde{\omega}_k(-\tilde{J}))^{-1} \circ \nabla(I \oplus 0),$$

y por tanto

$$\begin{aligned} |\nabla(\tilde{\omega}_k(-\tilde{J}))^{-1}|_{g_k} &\leq |-(\tilde{\omega}_k(-\tilde{J}))^{-1} \circ \nabla\tilde{\omega}_k(-\tilde{J}) \circ (\tilde{\omega}_k(-\tilde{J}))^{-1}|_{g_k} + \\ &+ O(c_k^{-1/2}) \leq O(c_k^{-1/2}). \end{aligned}$$

El último paso es acotar $|\nabla^r(Q_k - \tilde{I})|_{g_k}$. Esto se comprueba en una carta adaptada a las curvaturas; allí se tiene que aplicar el método de Gauss a $-A_k^2 \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R}) \subset M_{2n+1 \times 2n+1}(\mathbb{R})$, donde las derivadas parciales hasta orden r de $A^2_{k\,i,j} + \delta_{i,j}$ son de tamaño $O(c_k^{-1/2})$, y teniendo en cuenta que la diferencia entre el cambio de base y la identidad sólo usa combinaciones lineales de productos de las entradas, y también por tanto su inversa. Las cotas finales para la raíz cuadrada se siguen del mismo tipo de consideraciones. $\square$

Cuando partimos de una variedad calibrada (M, D, ω) y simplectizamos, tal y como se ha indicado en el apartado 2.3, la extensión de J resulta ser compatible sólo en la hoja $M \times \{0\}$. Teniendo en cuenta que la escisión dada por el núcleo de $k\omega$ y la métrica es la misma, es fácil ver que el resultado de aplicar el lema 3.21 a la simplectización (con las simplificaciones obvias al ser la distribución todo el tangente) y restringir las correspondiente estructuras $\tilde{J}_k = \bar{J}_k$ a $M \times \{0\}$, es el mismo que el de aplicar el mismo lema a (M, D, J, w, g), cuyo resultado es J de nuevo.

3.3. Cartas de Darboux y secciones de referencia

Ahora ya podemos mostrar, en el caso impar, la existencia de cartas coincidiendo aproximadamente con el modelo Kähler de la definición 3.1.

También mencionaremos las modificaciones necesarias en presencia de polarizaciones.

Lema 3.22. *Para todo $x \in M$ y $k \in \mathbb{N}_+$ existen cartas adaptadas de Darboux $\varphi_{k,x}\colon (\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}, 0) \to (U_{k,x}, x)$ con coordenadas $z_k^1, ..., z_k^n, s_k$. Esto es, cartas adaptadas a ω_k para las que $\varphi_{k,x}^*\omega_k = \omega_0$. En cuanto a la relación entre J y J_0 (más correctamente entre $\tilde{J}$ y $\tilde{J}_0$, la extensión asociada a la métrica euclídea en la carta), se tiene $\varphi_{k,x}^* D \cong D_h$, $\varphi_{k,x}^*(\ker \omega_k) = \frac{\partial}{\partial s}$ y $\varphi_{k,x}^*\tilde{J} \cong \tilde{J}_0$.*

Siendo más precisos con las cotas, se tiene además:

$$|\varphi_{k,x}^* D - D_h|_{g_k} \leq O(|(z_k, s_k)|),\ |\nabla^j(\varphi_{k,x}^* D - D_h)|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2}),\ \forall j \geq 1,$$

donde las desigualdades se satisfacen en una bola de g-radio fijo de modo uniforme en k y x.

Para las componentes antiholomorfas,

$$\begin{aligned} |\bar{\partial}\varphi_{k,x}^{-1}(z_k, s_k)|_{g_k} &= O(c_k^{-1/2} + |(z_k, s_k)|c_k^{-1/2}), \\ |\nabla^j\bar{\partial}\varphi_{k,x}^{-1}(z_k, s_k)|_{g_k} &= O(c_k^{-1/2}), \end{aligned}$$

$\forall j \geq 1$, uniformemente en k y x en una bola de g-radio fijo centrada en x, donde $\bar{\partial}\varphi_{k,x}^{-1}$ es la parte antiholomorfa de $\nabla_{\tilde{D}}\pi_{D_h}(\varphi_{k,x}^{-1})$, con $\pi_{D_h}(\varphi_{k,x}^{-1})\colon U_{k,x} \to \mathbb{C}^n$.

PRUEBA. En otras palabras, queremos probar la existencia de cartas adaptadas para las que las distribuciones $\mathrm{Ann}(D), D^{*1,0}$ y $D^{*0,1}$ coinciden aproximadamente con $ds, T^{*1,0}\mathbb{C}^n$ y $T^{*0,1}\mathbb{C}^n$ respectivamente, y tal que $\omega_k \cong \omega_0$ (pudiendo además lograr $\omega_k = \omega_0$). La prueba sigue las líneas de la de D. Auroux en [4] para el caso par.

Comenzamos con una primera familia de cartas $\phi_{1,x}$ para la cual podemos suponer $\phi_{1,x}^* J_x = J_0(0)$, componiendo si es necesario con una transformación lineal. Reescalamos para obtener una primera familia $\phi_{k,x}\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \to (U_x, x)$. Las estimaciones para $\phi_{k,x}^{-1}$ y sus derivadas covariantes se tiene sin dificultad, e igualmente ocurre con la parte antiholomorfa: se ha de proyectar $\nabla\phi_{k,x}^{-1}\colon TB_g(x,c) \to T(\mathbb{C}^n \times \mathbb{R})$ sobre $T\mathbb{C}^n$, y $\bar{\partial}\phi_{k,x}^{-1}$ resulta ser la parte antiholomorfa con respecto a $\tilde{J}$ y $\tilde{J}_0$ en $\mathbb{C}^n$. Las cotas buscadas, una vez conocidas las de $\phi_{k,x}^{-1}$ y sus derivadas, son equivalentes a cotas similares para el ángulo máximo y sus derivadas entre los espacios de 1-formas antiholomorfas para ambas estructuras casi-complejas en D_h. Para éstas, las cotas se siguen del hecho de que la construcción de las cartas depende de modo diferenciable del centro y de que ambas estructuras coinciden en el origen. Siendo estrictos, como las cartas no son necesariamente adaptadas a ω_k, la estructura casi-compleja $\tilde{J}_0$ para estas cartas no es exactamente la del enunciado, pues la componente vertical no es la imagen del núcleo de ω_k. En cualquier caso y por lo comentado en la sección 1 acerca de la relación de las componentes holomorfas y antiholomorfas para diferentes escisiones, dado que podemos pasar a cartas adaptadas a ω_k componiendo con las aplicaciones Φ_{x,R_k}^t (lema 3.13) que fijan $D_h(0)$ (no sólo a nivel infinitesimal) y tiene cotas $O(1)$ para la primera derivada y $O(c_k^{-1/2})$ para las sucesivas derivadas, obtenemos las cotas $O(|(z_k, s_k)|)$ para la parte antiholomorfa de las inversas de estas cartas adaptadas a ω_k y cotas $O(c_k^{-1/2})$ para las sucesivas derivadas covariantes.

El resto de la prueba sigue los argumentos de la situación par; como la dirección vertical genera el núcleo de la 2-forma, podemos trabajar en una de las hojas simplécticas $\mathbb{C}^n \times \{0\}$ y aplicar la transformación allí obtenida al resto de las hojas (la restricción de la 2-forma a dicha hoja satisface las cotas necesarias para aplicar los razonamientos usados en dimensión par). $\square$

Observación 3.23: En una carta Darboux se puede elegir una trivialización adecuada de modo que la forma de conexión tenga una expresión determinada. Como contrapartida perdemos control sobre J en el origen, que se encontrará a distancia $O(c_k^{-1/2})$ de J_0. En determinadas circunstancias conviene tener la igualdad. Para ello podemos deshacer la última transformación, que es de tamaño $O(c_k^{-1/2})$, y obtenemos la propiedad buscada. Si hacemos pullback de la forma de conexión, la variación de la misma está acotada por $O(c_k^{-1/2})$.

Hablamos entonces de *coordenadas aproximadamente holomorfas* siempre que la escisión $T^*_{\mathbb{C}}M = \mathrm{Ann}(D)_{\mathbb{C}} \oplus \tilde{D}^{*1,0} \oplus \tilde{D}^{*0,1}$ coincide aproximadamente con $T^*_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}) = ds \oplus T^{*1,0}\mathbb{C}^n \oplus T^{*0,1}\mathbb{C}^n$, con cotas como las del enunciado, es decir, del orden de la norma o la norma mas un término de orden $O(c_k^{-1/2})$, y de este último orden para las sucesivas derivadas. También emplearemos el mismo nombre cuando la escisión de partida sea $\mathrm{Ann}(D) \oplus \bar{D}^{*1,0} \oplus \bar{D}^{*0,1}$. En realidad, también emplearemos esté terminología para otras escisiones, pero pospondremos esta discusión hasta la siguiente sección.

Observación 3.24: En caso de presencia de polarizaciones G en variedades pares, se pueden componer las cartas de Darboux usuales con una transformación h_0-unitaria (h_0 la métrica hermitiana canónica) tal que G acabará coincidiendo con $\mathbb{C}^g \times \{\cdot\}$ de modo aproximado, y $G^\perp$, representada por ejemplo como una una función con valores en $\mathbb{C}^g$, estará acotada inferiormente de modo uniforme (formará un ángulo con $\mathbb{C}^g \times \{\cdot\}$ acotado inferiormente de modo uniforme), y todas las derivadas de la función serán de orden $O(c_k^{-1/2})$ (es decir, la distribución será aproximadamente constante). Además tendremos las correspondientes igualdades aproximadas $G^{*1,0} \approxeq T^{*1,0}\mathbb{C}^g$, $G^{*0,1} \approxeq T^{*0,1}\mathbb{C}^g$. Al ser h_0 unitaria ω_0 no cambia.

Hablaremos así de *coordenadas aproximadamente holomorfas adaptadas a G* cuando las cotas anteriores comparando $G, G^{*1,0}, G^{*0,1}$ y $G^\perp$ con los correspondientes modelos se verifiquen.

Centrándonos de nuevo en el caso impar, veremos que para construir sucesiones de secciones aproximadamente holomorfas con interesantes propiedades de transversalidad (sin usar simplectizaciones), no será posible tener la misma clase de control para las direcciones de D que para las de todo el tangente. Para generalizar las nociones de sucesión aproximadamente holomorfa, necesitamos elegir una retracción i.

Definición 3.25. *Sea i una retracción de la proyección canónica $T^*M \to D^*$. Una sucesión τ_k de secciones de L_k es i-asintóticamente J-holomorfa (o i-A.H.) si existen constantes positivas $(C_j^D, C_j)_{j\geq 0}$ tal que,*

$$|\tau_k|_{g_k} \leq C_j^D, \ |\nabla^j_{i(D^*)}\tau_k|_{g_k} \leq C_r^D, \ |\nabla^j \tau_k|_{g_k} \leq C_r$$
$$|\nabla^{j-1}\bar{\partial}_{i(D^*)}\tau_k|_{g_k} \leq C_r c_k^{-1/2}.$$

Una sucesión de secciones tiene i-decaimiento gaussiano con respecto a x si existen constantes positivas $\lambda > 0$, $(C_j)_{j\geq 0}$ y polinomios $(P_j)_{j\geq 0}$ verificando $\forall y \in M$ y $\forall j \geq 0$,

$$|\nabla^j_{i(D^*)}\tau_k(y)|_{g_k} \leq P_j(d_k(x,y))e^{-\lambda d_k(x,y)^2};$$
$$|\nabla^j \tau_k(y)|_{g_k} \leq C_r P_j(d_k(x,y))e^{-\lambda d_k(x,y)^2}$$

Si sólo estamos interesados en controlar las r primeras derivadas, hablaremos de sucesiones de secciones i-C^r-A.H. (resp. con i-C^r-decaimiento gaussiano).

Nótese que $\nabla^j_{i(D^*)}\tau_k$ representa una sección de $i(D^*)^{\otimes j} \otimes L_k$ construida de modo recursivo usando las conexiones inducidas por ∇_k, la inducida en $i(D^*)$ por la de Levi-Civita y la escisión i.

Observación 3.26: Hacemos notar de nuevo que las nociones anteriores *dependen de la escisión usada.* Si empleamos la asociada a la métrica, que nos parece la elección más natural, hablaremos de secciones A.H. e igualmente de sucesiones de secciones con decaimiento gaussiano. Otra escisión que será muy útil a nivel local como elemento auxiliar es $\tilde{i}$, la asociada a las curvaturas.

Queremos ser capaces de verificar las cotas de la definición 3.25 para la retracción $\tilde{i}$ en cartas de Darboux (o coordenadas aproximadamente holomorfas) usando D_h, J_0, g_0 y d (recordemos que las cartas de Darboux son cartas adaptadas a las curvaturas, es decir, a la escisión $\tilde{i}$). Para probar que esto es posible se usan argumentos similares a los ya usados por ejemplo en el lema 3.17. El único ingrediente nuevo es la presencia del fibrado L_k. En cada carta fijamos una trivialización unitaria tal que la forma de conexión sea A_0, la misma para todo k y x. Recordemos que d denota a la derivada usual o conexión plana (derivadas parciales), y d_{D_h} a su proyección paralela a ds (las derivadas parciales respecto a las coordenadas horizontales). Asimismo denotamos mediante d^j (resp. $d^j_{D_h}$) al j-ésimo iterado del correspondiente operador, *que no ha de confundirse con la derivada exterior*; denotemos también por d_{A_0} a la conexión plana acoplada con A_0, por d_{A_0,D_h} y $d_{A_0,D}$ sus proyecciones a D_h y D paralelamente a ds y mediante $d^j_{A_0}, d^j_{A_0,D_h}$ y $d^j_{A_0,D}$ a los iterados j-ésimos respectivos.

Lema 3.27. *Sea E uno de los fibrados de la definición 3.6 y sea τ_k una sucesión de secciones de $E \otimes L_k$ tal que $|\nabla^j \tau_k|_{g_k} \leq O(1)$, $j = 0, ..., r$. Para* *una familia de cartas de Darboux con la trivialización descrita anteriormente se tiene:*

(1) $|\nabla^j \tau_k|_{g_k} \leq P_j(d_k(\psi_{k,x}(z_k, s_k))O(1)$, $j = 0, ..., r$ *es equivalente a* $|d^j \tau_k|_{g_0} \leq Q_j(|(z_k, s_k)|)O(1)$, $j = 0, ..., r$ *en los puntos de* $B_{g_0}(0, O(c_k^{1/2}))$ *(o con polinomio igual a* 1 *sobre* $B_{g_0}(0, O(1))$*).*

(2) $|\nabla^j \tau_k|_{g_k} \leq P_j(d_k(\psi_{k,x}(z_k, s_k))O(c_k^{-1/2})$, $j = 0, ..., r$ *es equivalente a* $|d^j \tau_k|_{g_0} \leq Q_j(|(z_k, s_k)|)O(c_k^{-1/2})$, $j = 0, ..., r$ *en los puntos de* $B_{g_0}(0, O(c_k^{1/2}))$ *(o con polinomio igual a* 1 *sobre* $B_{g_0}(0, O(1))$*).*

(3) $|\nabla^j_{\tilde{D}} \tau_k|_{g_k} \leq P_j(d_k(\psi_{k,x}(z_k, s_k))O(1)$, $j = 0, ..., r$ *es equivalente a* $|d^j_{A_0, D_h} \tau_k|_{g_0} \leq Q_j(|(z_k, s_k)|)O(1)$, $j = 0, ..., r$ *o a* $|d^j_{D_h} \tau_k|_{g_0} \leq S_j(|(z_k, s_k)|)O(1)$, $j = 0, ..., r$ *en los puntos de* $B_{g_0}(0, O(c_k^{1/2}))$ *(o con polinomio igual a* 1 *sobre* $B_{g_0}(0, O(1))$*).*

(4) $|\nabla^j_{\tilde{D}} \tau_k|_{g_k} \leq P_r(d_k(\psi_{k,x}(z_k, s_k))O(c_k^{-1/2})$, $j = 0, ..., r$ *es equivalente a* $|d^j_{A_0, D_h} \tau_k|_{g_0} \leq Q_r(|(z_k, s_k)|)O(c_k^{-1/2})$, $j = 0, ..., r$ *o a* $|d^j_{D_h} \tau_k|_{g_0} \leq S_j(|(z_k, s_k)|)O(c_k^{-1/2})$, $j = 0, ..., r$ *en los puntos de* $B_{g_0}(0, O(c_k^{1/2}))$*(o con polinomio igual a* 1 *sobre* $B_{g_0}(0, O(1))$*).*

(5) *Las cotas de* (1) *o* (2) *implican la misma clase de cotas para* $|\nabla^{r-j} \nabla^j_{\tilde{D}} \tau_k|_{g_k}$, $j = 0, ..., r$. *En particular* (1) *implica* (3) *y* (2) *implica* (4).

Los P_j, Q_j, S_j *son polinomios que se obtienen los unos de los otros mediante fórmulas que no dependen ni de* k *ni de* x.

PRUEBA. En cuanto a las derivadas totales la diferencia $\nabla^r \tau_k - d^r \tau_k$ es una suma de *términos homogéneos de grado* r, cada uno de los cuales es un producto de alguna derivada $d^j \tau_k$ (con peso j), y términos que son derivadas de A_0 y de los símbolos de Christoffel (cada uno pesado con el orden de la derivada más uno). Los símbolos de Christoffel tienen tamaño $O(c_k^{-1/2})$, el de A_0 es $|(z_k, s_k)|O(1)$, su primera derivada es ω_0 de tamaño $O(1)$, y sus derivadas de orden superior son por hipótesis de tamaño $O(c_k^{-1/2})$. El resultado se sigue pues hemos supuesto que τ_k y sus derivadas están acotadas por $O(1)$.

Obsérvese también que como en todos los sumandos tenemos una derivada de τ_k, si para un punto x se tiene

$$\tau_k = \hat{\tau}_k \otimes e^{-\lambda |(z_k, s_k)|^2}, \ \lambda > 0, \tag{3.2}$$

con todas las derivadas de $\hat{\tau}$ acotadas por $O(1)$, entonces τ_k, una vez multiplicada por una función meseta β_k con soporte en $B(0, c_k^{1/6})$ (definida mediante reescalamiento de una función en $B(0,1)$), satisface el segundo requerimiento para ser una sección con $\tilde{\imath}$-decaimiento gaussiano con respecto a x (véase **[12]**).

El enunciado concerniente a las derivadas en la direcciones de las distribuciones es esencialmente el del lema 3.17. Se define

$$\pi^{\tilde{D}}_{k,j} \colon T^*M^{\otimes j} \otimes E \otimes L_k \to \tilde{D}^{*\otimes j} \otimes E \otimes L_k,$$

(resp. $\pi^{D_h}_{k,j}: T^*M^{\otimes j}\otimes E\otimes L_k \to \tilde{D}_h^{*\otimes j}\otimes E\otimes L_k$) como la proyección asociada a las curvaturas (nótese que los fibrados varían con k).

Los morfismos $\pi^{\tilde{D}}_{k,j}$ (resp. $\pi^{D_h}_{k,j}$) son secciones (resp. secciones locales) de $\mathrm{End}(T^*M^{\otimes j}\otimes E\otimes L_k)$, que son fibrados con una métrica natural inducida por g_k (resp. g_0) y h_k, y una conexión inducida por ∇_g (resp. d) y ∇_k. Para una sucesión de tensores de estos fibrados tenemos por tanto la noción de igualdad aproximada hasta orden r, puesto que tenemos métricas para medir y conexiones para tomar derivadas. En particular las sucesiones anteriores se pueden escribir en la forma $p^{\tilde{D}}_{k,j}\otimes I$ (resp. $p^{D_h}_{k,j}\otimes I$), donde las proyecciones son secciones de $T^*M^{\otimes j}\otimes E$ y la identidad es una sección de $\mathrm{End}(L_k) = L_k^*\otimes L_k = \mathbb{C}$ (con conexión inducida trivial). La identidad tiene derivadas nulas. De ello se deduce, en una bola de radio $O(c_k^{1/2})$, cotas de orden $O(1)$ para las aplicaciones y de orden $O(c_k^{-1/2})$ para las derivadas superiores (tanto para ∇ como para d_{A_0}). La diferencia de las proyecciones está acotada por $|(z_k,s_k)|O(c_k^{-1/2})$ y sus derivadas por $O(c_k^{-1/2})$.

Nótese que en esta discusión la elección de trivializaciones de L_k no juega ningún papel (basta con que sean unitarias y den la forma de conexión adecuada, sin importarnos su dependencia en k,x).

Escribamos $\nabla_{\tilde{D}} - d_{A_0,D_h} = (\nabla_{\tilde{D}} - d_{A_0,D}) + (d_{A_0,D} - d_{A_0,D_h})$. Usando las ideas previas la diferencia $\nabla\tau_k - d_{A_0}\tau_k$ resulta ser una suma de productos de componentes de τ_k multiplicados por símbolos de Christoffel. Por tanto $\nabla_{\tilde{D}}\tau_k - d_{A_0,D}\tau_k = \pi^{\tilde{D}}_{k,1}(\nabla\tau_k - d_{A_0}\tau_k) \approxeq 0$, donde la igualdad aproximada es para secciones de $E\otimes L_k$ (véase la observación 3.16 tras la definición 3.14).

Similarmente, $d_{A_0,D}\tau_k - d_{A_0,D_h}\tau_k = (\pi^{\tilde{D}}_{k,1} - \pi^{D_h}_{k,1})d_{A_0}\tau_k$, y los resultados se deducen de $|d_{A_0}\tau_k|_{g_k} \le O(1)$, y $\pi^{\tilde{D}}_{k,1} \approxeq \pi^{D_h}_{k,1}$. Por último, $(d_{D_h,A_0} - d_{D_h})\tau_k = A_0\tau_k$, y usando el mismo razonamiento que prueba el punto (1) se ve que las cotas son las buscadas. Obsérvese de nuevo que si nuestra sucesión se puede escribir en la forma de la ecuación (3.2) para un punto x entonces, una vez multiplicada por β_k, la condición de $\tilde{\imath}$-decaimiento gaussiano con respecto a x para la primera derivada proyectada sobre $\tilde{D}^*$ se cumple.

Las diferencias para derivadas de orden superior se evalúan del mismo modo. Por ejemplo $\nabla_{\tilde{D}}\nabla_{\tilde{D}} - d_{A_0,D_h}d_{A_0,D_h} = \nabla_{\tilde{D}}(\nabla_{\tilde{D}} - d_{A_0,D_h}) + (\nabla_{\tilde{D}} - d_{A_0,D_h})d_{A_0,D_h}$. Para el primer sumando es sabido que $\nabla(\nabla_{\tilde{D}} - d_{A_0,D_h})\tau_k$ satisface las cotas requeridas, y por tanto también la proyección $\nabla_{\tilde{D}}(\nabla_{\tilde{D}} - d_{A_0,D_h})\tau_k$ (y todas sus derivadas). Para el segundo sumando aplicamos lo hecho para la primera derivada pero a la sucesión $d_{A_0,D_h}\tau_k$, que también satisface las hipótesis necesarias. Se evalúa del mismo modo la diferencia $d^2_{A_0,D_h} - d^2_{D_h}$. Para la derivada de orden r escribimos $\nabla^r_{\tilde{D}} - d^r_{A_0,D_h} = \nabla_{\tilde{D}}(\nabla^{r-1}_{\tilde{D}} - d^{r-1}_{A_0,D_h}) + (\nabla_{\tilde{D}} - d_{A_0,D_h})d^{r-1}_{A_0,D_h}$, siendo el primer sumando del tamaño requerido por inducción, y también el segundo sin más que aplicar la construcción del caso $r=1$ para el fibrado adecuado. Se hace lo propio con $d^r_{A_0,D_h} - d^r_{D_h}$.

Como antes, sucesiones con la expresión de la ecuación (3.2) multiplicadas por β_k verifican la segunda condición de $\tilde{\imath}$-decaimiento gaussiano con respecto al punto correspondiente.

La afirmación quinta es evidente para la descomposición $D_h \oplus \frac{\partial}{\partial s}$ y d_{A_0,D_h} (ó d_{D_h}), porque la mezcla de tipos en la derivada covariante sólo es causada por los símbolos de Christoffel, y por tanto está acotada por $P_r((z_k,s_k))O(c_k^{-1/2})$. Si τ_k se escribe como en (3.2), entonces la correspondiente sección tiene $\tilde{\imath}$-decaimiento gaussiano con respecto a x.

□

Observación 3.28: En particular vemos que asociadas a las cartas adaptadas a las curvaturas y usando las trivializaciones citadas, del punto (2) se infiere que se puede definir la noción de anulación en sentido aproximado a orden r de una sucesión de secciones de $E\otimes L_k$, sin más que pedir las correspondientes cotas para las derivadas parciales de orden menor o igual que r (como en la ecuación 3.1 en la definición 3.14). Además, del punto (4) se deduce que si las secciones son de $E_{\tilde{D}} \otimes L_k$ basta con considerar las derivadas parciales en las direcciones horizontales.

La existencia de secciones aproximadamente holomorfas, que jugarán el papel de particiones de la unidad de la teoría, es el contenido del siguiente lema:

Lema 3.29. *Existen $\kappa > 0$ y $K \in \mathbb{N}_+$, tal que para todo $x \in M$ se pueden construir secciones $\tau_{k,x}^{ref}$ de L_k de modo que la sucesión es $\tilde{\imath}$-A.H (con constantes (C_j^D, C_j) independientes de x), tiene $\tilde{\imath}$-decaimiento gaussiano respecto a x y verifica $|\tau_{k,x}^{ref}| \geq \kappa$ en una bola de g_k-radio fijo centrada en x (todas las cotas son satisfechas para $k \geq K$).*

PRUEBA. Fijamos cartas adaptada como antes y elegimos trivializaciones unitarias tal que la forma de conexión es $A_0 = \frac{1}{4}(\sum_{i=1}^n z_k^i d\bar{z}_k^i - \bar{z}_k^i dz_k^i)$.

Siguiendo las ideas de S. Donaldson [**12**] seleccionamos la sección definida por la función $f(z_k,s_k) = e^{-|(z_k,s_k)|^2/4}$ y usamos una función de corte β_k con soporte en la bola de radio $c_k^{1/6}$. El decaimiento gaussiano para g_0, d, D_h y $|\cdot|^2$ se comprueba fácilmente, y el lema 3.27 da el resultado perseguido.

La holomorficidad aproximada es trivial para J_0 (notamos que para cualquier polinomio Q_r existe una constante C_{Q_r} tal que para cualquier $(z_k,s_k) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ y cualquier $\lambda > 0$, $|Q_r(|z_k,s_k|)e^{-\lambda|(z_k,s_k)|^2)}| \leq C_{Q_r}$).

De las cotas para $|\bar{\partial}\varphi_k(z_k,s_k)|_{g_k}$ y $|\nabla^r\bar{\partial}\varphi_{k,x}(z_k,s_k)|_{g_k}$ se deducen el mismo tipo de estimaciones para $\tilde{J}$. □

Es importante notar que para las secciones de referencia tenemos cotas $C_j = C_j^D$. O dicho de otro modo, no hay pérdida de control en la dirección de $\ker \omega_k$ si se compara con el obtenido en las direcciones holomorfas.

3.4. Relación entre las teorías A.H. y la teoría relativa

Hemos mencionado la posibilidad de desarrollar una teoría aproximadamente holomorfa que utiliza la escisión dada por la métrica, en vez de la dada por las curvaturas. Nos hemos centrado en la segunda porque es para ella para la que es más o menos evidente la construcción de sucesiones de secciones locales $\tilde{\imath}$-aproximadamente holomorfas con $\tilde{\imath}$-decaimiento gaussiano.

Sea i una retracción cualquiera de $T^*M \to D^*$. Denotemos mediante $q^{\tilde{\imath},i}: T^*M \to T^*M$ al isomorfismo de fibrados que envía envía $\tilde{D}^*$ a $i(D^*)$ paralelamente a $\mathrm{Ann}(D)$, siendo también la identidad en éste. Sea $q^{\tilde{\imath},i}_{r,j}: T^*M^{\otimes r} \otimes L_k \to T^*M^{\otimes r} \otimes L_k$ definido como la identidad en todos los factores salvo en el j-ésimo de $T^*M^{\otimes r}$, en el que coincide con $q^{\tilde{\imath},i}$.

Lema 3.30. *Sea τ_k una sucesión de secciones de $L^{\otimes k}$. Supongamos que existen cotas de orden $O(1)$ para $q^{\tilde{\imath},i}$ y sus derivadas (para k suficientemente grande). Entonces se tiene que τ_k es una sucesión de secciones $\tilde{\imath}$-A.H. si y solamente si es una sucesión de secciones i-A.H. Supongamos además que se tienen cotas $O(c_k^{-1/2})$ para las derivadas de $q^{\tilde{\imath},i}$. En tal caso es posible encontrar una constante C tal que si $|\nabla_{\tilde{D}}\tau_j|_{g_k} \leq C^D$, $j = 0, ..., r$, entonces para k suficientemente grande $|\nabla_{i(D^*)}\tau_k|_{g_k} \leq CC^D$, donde el tamaño de K dependerá también de las cotas para las derivadas totales. En particular, también en este último caso las secciones con decaimiento gaussiano lo son para ambas teorías, y es posible estimar la constante C asociada a las derivadas a lo largo de D al pasar de una a otra.*

Si tenemos la primera clase de cotas hablaremos de teorías A.H. equivalentes para ambas retracciones. En el segundo caso hablaremos de teorías A.H. fuertemente equivalentes.

PRUEBA. Las ideas son las mismas que en los lemas 3.17, 3.27. Probamos que la $\tilde{\imath}$-holomorfía aproximada implica la i-holomorfía aproximada.

Denotemos mediante $\bar{\partial}_{i(D^*)}$ la componente antiholomorfa para la retracción i. Es evidente que $\bar{\partial}_{i(D^*)}\tau_k = q^{\tilde{\imath},i}_{1,1}(\bar{\partial}_{\tilde{D}}\tau_k)$. La derivada de r-ésima será la suma de 2^r términos que son composición de alguna derivada de $q^{\tilde{\imath},i}_{1,1}$ actuando sobre alguna derivada de $\bar{\partial}_{\tilde{D}}\tau_k$, por lo que el resultado se sigue fácilmente. Es importante notar que sólo hay un término en el que no aparece ninguna derivada de $q^{\tilde{\imath},i}_{1,1}$, y éste es $q^{\tilde{\imath},i}_{1,1}(\nabla^r\bar{\partial}_{\tilde{D}}\tau_k)$ (siendo más precisos la extensión de $q^{\tilde{\imath},i}_{1,1}$ actuando sobre la correspondiente derivada covariante es $q^{\tilde{\imath},i}_{r,1}(\nabla^r\bar{\partial}_{\tilde{D}}\tau_k)$). Luego si existe control de orden $O(c_k^{-1/2})$ para k suficientemente grande la cota que obtengamos será básicamente la asociada a este término.

A la hora de calcular las derivadas a lo largo de D la situación es similar. En primer lugar hacemos notar que las cotas en la aplicación $q^{\tilde{\imath},i}$ se pueden computar como sigue. Se eligen cartas adaptadas a la métrica y un vector de la forma $\frac{\partial}{\partial s} + v_k$ generando la dirección complementaria asociada a i. La cota para la aplicación equivale a una inferior para el ángulo mínimo entre este complementario y D, y equivale a una cota superior para la norma euclídea de v_k. Las cotas para las derivadas covariantes equivalen a cotas del mismo orden para $d^r v_k$. De estas consideraciones se sigue fácilmente la misma clase de cotas para $\nabla^{r-j}\nabla^j_{i(D^*)}q^{\bar{r},r}$.

Por definición, $\nabla_{i(D^*)}\tau_k$ es la proyección a lo largo de $\mathrm{Ann}(D)$ de $\nabla\tau_k$. Siendo este factor común a ambas escisiones, se tiene $\nabla_{i(D^*)}\tau_k = q^{\bar{i},i}_{1,1,}\nabla_{\tilde{D}}\tau_k$. Similarmente a lo que ocurre con las derivadas totales $\nabla^r_{i(D^*)}\tau_k$ es una suma de términos de dos tipos. Por un lado están aquellos en los que aparecen derivadas de $q^{\bar{i},i}$, y derivadas restringidas a $i(D^*)$. Por hipótesis, obtenemos cotas del mismo orden que aquellas para $q^{\bar{i},i}_{1,1,}$. El término restante resulta ser $q^{\bar{i},i}_{r,r} \circ \cdots \circ q^{\bar{i},i}_{r,1}(\nabla_{\tilde{D}}\tau_k)$. Por tanto para teorías fuertememnte equivalentes la cota viene dada, para k suficientemente grande, por el citado sumando (y para teorías equivalentes se tiene una cota de orden $O(1)$).

La afirmación relativa al decaimiento gaussiano es obvia.

La demostración de la implicación en el sentido contrario es exactamente la misma.

$\square$

Teniendo en cuenta que la aplicación que relaciona la escisión de la métrica y la curvatura tiene derivadas acotadas por $O(c_k^{-1/2})$ (lema 3.9) se tiene:

Lema 3.31. *Existen $\kappa > 0$ y $K \in \mathbb{N}_+$, tal que para todo $x \in M$ se pueden construir secciones $\tau^{ref}_{k,x}$ de L_k de modo que la sucesión es A.H (con constantes (C^D_j, C_j) independientes de x), tiene decaimiento gaussiano respecto a x (con constantes iguales) y verifica $|\tau^{ref}_{k,x}| \geq \kappa$ en una bola de g_k-radio fijo centrada en x (todas las cotas son satisfechas para $k \geq K$).*

De ahora en adelante nuestra teoría aproximadamente holomorfa será la referida a la métrica (y sus fuertemente equivalentes). Además, de nuevo por simplificar la notación, denotaremos la proyección de la derivada a $\bar{D}$ mediante ∇_D, en vez de $\nabla_{\tilde{D}}$ ó $\nabla_{\bar{i}(D^*)}$.

Observación 3.32: Las cotas de orden $O(1)$ son suficientes para asegurar que secciones A.H. para una retracción lo son para la otra. Este hecho nos será de utilidad para dar formas normales.

La ventaja de las teorías fuertemente equivalentes es la siguiente. Un problema fundamental que encontraremos más adelante (secciones 4, 5) será estudiar las propiedades de transversalidad de los llamados r-jets pseudo-holomorfos asociados a τ_k una sucesión A.H. de secciones. Estas nuevas secciones de fibrados construidos a partir de $\bar{D}^{*1,0}$, que introduciremos en la próxima sección, coinciden de modo aproximado con $\nabla^r_D\tau_k$ (recordemos que la notación ∇^r_D sustituye a $\nabla^r_{\bar{i}(D^*)}$; también esta afirmación es cierta usando las conexiones modificadas que introduciremos en la proposición 4.6). Para otra retracción i que dé una teoría fuertemente equivalente podemos intentar hacer lo propio con los r-jets correspondientes, que coinciden de modo aproximado con $\nabla^r_{i(D^*)}\tau_k$. En las aplicaciones principales veremos que el morfismo de fibrados correspondiente inducido por $q^{\bar{i},i}$ preserva las estratificaciones con respecto a las que queremos lograr transversalidad (serán estratificaciones invariantes por $Gl(n, \mathbb{C})$). Al ser las teorías fuertemente equivalentes el r-jet asociado a i será de modo aproximado la imagen por dicha aplicación de fibrados del r-jet asociado a $\bar{i}$, lo que implicará que la obtención de transversalidad para uno equivaldrá a transversalidad para el otro. Para teorías equivalentes esto sólo es cierto en principio para 1-jets (aunque veremos que en determinadas regiones la relación existente mejora).

Observación 3.33: Una consecuencia de la discusión anterior es que para una variedad compacta calibrada de tipo entero, una vez escogida J estructura casi-compleja compatible con ω se tiene una metrica $g_{|D} = \omega(\cdot, J)$, y diferentes extensiones a una métrica g en M dan teorías A.H. fuertemente equivalentes.

Ahora podemos dar una definición más precisa de lo que son coordenadas aproximadamente holomorfas.

Definición 3.34. *Llamamos coordenadas aproximadamente holomorfas a las asociadas a familias de cartas adpatadas $\psi_{k,x}\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \to U_x$ para las que se verifica:*

(1) $\psi^*_{k,x} D \cong D_h$.
(2) *Las funciones coordenadas $z^j_k\colon U_x \to \mathbb{C}$ son A.H.*
(3) *El vector g_k-unitario v_k tal que $\frac{\partial}{\partial s}_k + v_k \in D^\perp$ tiene ángulo mínimo con respecto a D_h acotado inferiormente y todas sus derivadas están mayoradas por $O(c_k^{-1/2})$.*

En otras palabras, coordenadas aproximadamente holomorfas son aquellas para las que la correspondiente teoría local A.H. es fuertemente equivalente a nuestra teoría A.H. global asociada a la métrica.

Se puede debilitar el concepto anterior considerando familias de cartas centradas en puntos de determinadas sucesiones de subvariedades de (M, D, J, g_k) para las que la tercera condición se relaja pasando a pedirse solamente cotas de orden $O(1)$, es decir, consideramos cartas de modo que la noción local asociada de secciones A.H. es sólo equivalente a la nuestra; ciertas construcciones locales no son equivalentes para ambas nociones (aunque para algunas sí se dará esta equivalencia, y de ello haremos uso en su momento). Salvo que digamos lo contrario las coordenadas aproximadamente holomorfas que empleemos serán aquellas de la definición 3.34.

Es posible obtener otras familias de secciones de referencia con igual control en todas las direcciones usando la simplectización. Basta considerar las secciones de referencia de la teoría par centradas en puntos de $M \times \{0\}$, y ver que al restringir a ella las cotas se se mantienen. Para ello, y puesto que lo usaremos más tarde, consideramos el caso de una variedad par polarizada.

Si tenemos χ_k una sucesión de secciones C^r-A.H., $\bar{\partial}_G \chi_k$ también será de orden $O(c_k^{-1/2})$. Tomando cartas de Darboux centradas en cada punto de $M \times \{0\}$ podemos componer con la citada modificación en presencia de polarizaciones. En el modelo local es evidente que $\bar{\partial}_{\mathbb{C}^g}\chi_k \cong 0$. Para computar $\bar{\partial}_G\chi_k$ y sus derivadas basta con escribirlo como la proyección de $\bar{\partial}_{\mathbb{C}^g}\chi_k$ mediante el isomorfismo de fibrados que relaciona ambas escisiones. Las cotas para las cartas adaptadas implican que esta proyección tiene cotas de orden $O(1)$, y de orden $O(c_k^{-1/2})$ para sus derivadas. En definitiva, si $|\nabla^r\bar{\partial}\chi_k|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2})$, también $|\nabla^r\bar{\partial}_G\chi_k|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2})$.

Para la variedad simplectizada tomamos $G = D$, y necesitamos aún considerar la parte de la derivada a lo largo de TM. Puesto que la métrica hace que las copias de M sean ortogonales a la dirección $\frac{\partial}{\partial t}$, usando los argumentos anteriores se concluye que $|\nabla_M^r\bar{\partial}(\chi_{k|M})|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2})$. Del mismo modo ocurre para las cotas en las derivadas covariantes, para su proyección sobre $\bar{D}^*$, y para el decaimiento gaussiano. Por tanto si χ_k es una sucesión C^r-A.H.(C_r) de secciones definidas en $M \times [-\epsilon_k, \epsilon_k]$, $\chi_{k|M}$ será una sucesión C^r-A.H.(CC_r, CC_r), donde C es una constante que no depende de la sucesión de partida. En particular, de las secciones de referencia en $M \times [-\epsilon, \epsilon]$ centradas en los puntos de $M \times \{0\}$ obtenemos otra familia de secciones de referencia para (M, D, J, g) con las mismas cotas.

Obsérvese que en la manera en la que hemos extendido la métrica y la estructura casi-compleja a la variedad simplectizada, la retracción natural a la que están asociadas las secciones restringidas a $M \times \{0\}$ es la asociada a la métrica.

Por último notamos que la métrica en la simplectización construida extendiendo a g no juega ningún papel a la hora de asegurarse que las restricciones verifican las acotaciones adecuadas. Para cualquier métrica podemos elegir un sistema de cartas adaptadas a la variedad del modo obvio y usarlas para hacer estas comprobaciones.

Es importante precisar que podemos usar la simplectización no sólo para construir la teoría intrínseca local, sino para resolver problemas de transversalidad en M a lo largo de D para $\chi_{k|M}$, donde χ_k es una sucesión A.H. de la simplectización. En efecto, la transversalidad será una afirmación sobre $\nabla_D(\chi_{k|M})$. Por definición $\nabla_D(\chi_{k|M})$ es la proyección sobre D de $\nabla_{TM}(\chi_{k|M})$. Se comprueba por tanto que $\nabla_D\chi_k \in \Gamma(\bar{D}^* \otimes L_k)$ definida en la symplectización extiende a $\nabla_D(\chi_{k|M})$, con lo que podemos tratar de convertir el problema original de transversalidad en un problema de transversalidad para $\nabla_D\chi_k$ (que hemos visto coincide de modo aproximado con $\partial\chi_k$) en los puntos de M.

Del mismo modo los argumentos anteriores se aplican en el caso relativo (M, ω, G, N), donde (M, ω) es una variedad simpléctica compacta, N (resp Q) es una subvariedad simpléctica (resp. calibrada), y G es una distribución casi-compleja definida en un entorno U de N que extiende a TN (resp. a D). Obsérvese que es elemental encontrar una J compatible que haga complejas las extensiones locales arbitrarias de TN y D respectivamente. En el caso de una subvariedad simpléctica es posible encontrar en los puntos de N coordenadas A.H. (para M) adaptadas a G y que ademas rectifiquen N (en la carta coincide con $\mathbb{C}^g \times \{0\}$, y de hecho podemos lograr que $G \oplus G^\perp$ coincida de modo aproximado con $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^{n-g}$). De ello se deduce que si χ_k es una sucesión A.H. de $L_k := L^{\otimes k}$, la restricción a N también es una sucesión A.H. de (N, J, g^N), donde g^N es la métrica inducida. También se prueba que $\nabla_G \chi_k$ extiende a $\nabla(\chi_{k|N})$.

Si lo que tenemos es una subvariedad calibrada, se comprueba sin dificultad que –al igual que para subvariedades simplécticas– la restricción de $L^{\otimes k}$ define una sucesión muy amplia de fibrados. De nuevo tomando en los puntos de Q coordenadas A.H. que rectifiquen Q, cuya restricción a Q sean coordenadas A.H. y tal que $G \oplus G^{\perp}$ coincida de modo aproximado con $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^{n-g}$, si χ_k es una sucesión A.H. en M, se comprueba que su restricción es una sucesión A.H. de (Q, D, J, g^Q) y que $\nabla_D \chi_k$ extiende a $\nabla_D(\chi_{k|Q})$.

3.5. Fibrados de rango superior

Se tienen resultados similares para fibrados de rango superior. Aquellos que nos interesan especialmente son los de la forma $\mathbb{C}^m \otimes L_k$, pero también los que localmente tienen ese aspecto en el sentido aproximado.

Definición 3.35 (véase [**3**]). *Una sucesión $E_k \to M$ de fibrados hermitianos de rango m con conexión (unitaria) es asintóticamente muy amplia (o muy amplia) si existen constantes positivas $c_k \to \infty$, $(C_j)_{j\geq 0}$, tal que la curvatura verifica:*

(1) $\langle iF_k(v, Jv)u, u\rangle \geq g_k(v,v)|u|^2, \forall v \in D,$
(2) $|F_{k|D} - F_{k|D}^{1,1}|_{g_k} \leq C_r c_k^{-1/2},$
(3) $|\nabla^j F_k|_{g_k} \leq C_j c_k^{-1/2} \forall j \geq 0.$

Una sucesión E_k de fibrados muy amplia es localmente escindible en el sentido aproximado (o simplemente localmente escindible), si para cada $x \in M$ se puede encontrar sobre una bola de g-radio fijo secciones unitarias $\tau_{k,1}, \ldots, \tau_{k,m}$ tal que $\tau_{k,1} \wedge \ldots \wedge \tau_{k,m}$ está acotado inferiormente (son comparables a una base unitaria), y para la escisión local que inducen, $E_k = L_{k,1} \oplus \cdots \oplus L_{k,m}$, la matriz de 1-formas $\alpha_{k,x}$ que representan la diferencia entre la conexión principal y la suma directa de las inducidas en cada fibrado de línea verifica $|\nabla^r \alpha_{k,x}|_{g_k} \leq O(c_k^{-1/2})$ para todo $r \geq 0$ en la bola de g-radio fijo (lo que en realidad es más fuerte que pedir que sea anule en el sentido aproximado).

En cualquier caso sólo consideraremos aplicaciones para fibrados de la forma $E_k = E \otimes L_k$, donde E es un fibrado hermitiano con conexión. Para estos fibrados además de disponer de la escisión asociada a la métrica se tiene la dada por las curvaturas de L_k. La noción de sucesión de secciones A.H. es obvia al igual que la de sucesión con decaimiento gaussiano. Se comprueba fácilmente que al tensorizar las secciones de referencia anteriores con bases unitarias locales de E, se obtienen sucesiones de secciones aproximadamente holomorfas y con decaimiento gaussiano $\tau_{k,x,1}^{\mathrm{ref}}, \ldots, \tau_{k,x,m}^{\mathrm{ref}}$ formando una base local.

Para una sucesión de fibrados localmente escindibles generales la única escisión que podemos encontrar es la de la métrica. Aún así si lo que queremos es construir sucesiones de secciones de referencia sin recurrir a la teoría relativa, podemos considerar los fibrados locales $L_{k,j}$ y obtener secciones de referencia locales para ellos. En esta construcción localmente se puede usar como elemento auxiliar la correspondiente escisión asociada a las curvaturas (diferente en principio para cada fibrado), obtener para ella secciones de referencia A.H., y aplicar el lema 3.30 para concluir que las sucesiones también son de secciones de referencia con respecto a la escisión natural dada por la métrica.

Resumiendo, hemos visto que hay tantas nociones de secciones A.H. como retracciones para la proyección natural $T^*M \to D^*$. Muchas de estas resultan ser equivalentes o incluso fuertemente equivalentes. En particular, para la retracción dada por la métrica podemos encontrar secciones de referencia porque existen de modo obvio para la teoría asociada a la escisión dada por las curvaturas.

Es posible construir sin apenas esfuerzo secciones con las mismas propiedades usando la teoría relativa. Aunque a la luz de los resultados obtenidos usando dicha teoría pudiera parecer que el trabajo realizado para desarrollar la teoría local intrínseca es vano, esto no deja de ser sino una impresión un tanto errónea. En el fondo ambas son dos versiones de una teoría A.H. a lo largo de distribuciones (o foliaciones en los modelos), y la clase de construcciones locales que se necesitan son esencialmente las mismas: en primer lugar construcciones de cartas de Darboux asociadas a la distribución correspondiente que coincidan de modo aproximado con modelos locales obvios, y en segundo, soluciones al problema local de existencia de secciones A.H. también obvias (al menos tras los trabajos de S. Donaldson).

4. Jets casi-complejos

El objetivo principal de la teoría es demostrar, para una sucesión muy amplia de fibrados (localmente escindibles), la existencia de sucesiones de secciones aproximadamente holomorfas con buenas propiedades de transversalidad. Más explícitamente buscamos ser capaces de hacer el pullback de determinadas estratificaciones en el espacio total de los fibrados con los que estamos trabajando; por tanto hemos de ser capaces de lograr transversalidad de las secciones con respecto a estas estratificaciones. Las condiciones que impondremos a dichas estratificaciones implicarán que la *transversalidad uniforme* se reducirá a un resultado local de transversalidad estimada para familias uniparamétricas de funciones holomorfas. Obsérvese que esta teoría ya existe para el caso par, en el que la principal aplicación es para ciertas estratificaciones de los fibrados de jets pseudo-holomorfos. Desarrollaremos una teoría similar para jets pseudo-holomorfos en el caso de dimensión impar.

En el marco de la teoría relativa mostraremos que en el caso par existen estratificaciones interesantes asociadas a una polarización, y que bajo determinadas condiciones (esencialmente las enunciadas en [**4**]) la cuestión de transversalidad se reduce de nuevo al teorema local de transversalidad a lo largo de subvariedades para funciones aproximadamente holomorfas probado por J. P. Moshen [**43**].

En primer lugar pasamos a introducir los fibrados (hermitianos) de jets pseudo-holomorfos.

4.1. Jets pseudo-holomorfos

El caso integrable. Sea $E \to M$ un fibrado hermitiano complejo sobre una variedad compleja (dimensión par). Para definir los jets holomorfos es necesario tener una conexión ∇ con $F_\nabla^{0,2} = 0$, esto es, una estructura (compatible) de variedad compleja en E (teorema 2.1.53 en [**15**]; recordemos que este resultado es válido para cualquier conexión, y si ésta es unitaria equivale a que la curvatura coincida con $F_\nabla^{1,1}$). Dicha estructura da lugar a una noción de sección holomorfa y por tanto de r-jet holomorfo. El espacio de jets tiene cartas locales naturales obtenidas a través de la elección de coordenadas holomorfas en la base y de una trivialización holomorfa del fibrado, y usando ∂_0 (definido usando la estructura compleja canónica J_0 y la conexión trivial d) para aplicaciones holomorfas de $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{C}^m$; localmente obtenemos por tanto $\mathcal{J}^r_{n,m}$, los r-jets holomorfos usuales para aplicaciones holomorfas de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^m$ (clases de equivalencia de gérmenes de aplicaciones holomorfas de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^m$).

Se puede usar la conexión para dar una definición diferente de jets holomorfos (en principio localmente y dependiente de las cartas) considerando el operador ∂_∇ (esto es, si la matriz de formas de conexión en la trivialización holomorfa correspondiente es $A = A^{1,0}$, entonces el *1-jet acoplado* de una sección holomorfa τ se define como $(\tau, \partial_0\tau + A\tau)$)). Es importante observar que la clase de información que se obtiene de estos jets acoplados no es la de los jets usuales. En este punto es necesario explicar por qué son útiles. En primer lugar asumimos que nuestro fibrado E es de la forma $\mathbb{C}^m \otimes L$, donde (L, ∇) es un fibrado de línea hermitiano (normalmente uno muy amplio) en el que $F_\nabla = F_\nabla^{1,1}$ (insistimos en que en caso de que la conexión sea hermitiana esto equivale a la holomorfía del fibrado, y en caso contrario es una condición más fuerte). Una sección holomorfa τ de E define una aplicación ϕ a $\mathbb{CP}^{m-1}$ fuera de los puntos donde se anula. Pretendemos estudiar la genericidad de ϕ a través de la de τ. Para ello queremos trasladar el correspondiente problema de transversalidad para el r-jet de ϕ en el fibrado no-lineal $\mathcal{J}^r(M, \mathbb{CP}^{m-1})$, a un problema de transversalidad para el r-jet acoplado de τ en un fibrado de r-jets "acoplados" de secciones holomorfas de $\mathbb{C}^m \otimes L$, que pasamos a describir.

Comenzamos dando una noción de r-jets acoplados locales: una vez elegidas coordenadas holomorfas en la base usamos la conexión plana d actuando en secciones de $T^{*1,0}M \cong T^{*1,0}\mathbb{C}^n$; el r-jet acoplado de una sección τ en un punto de la carta se define como $(\tau, \partial_\nabla \tau, ..., \partial_\nabla^r \tau)$, donde los iterados de ∂_∇ se construyen usando d (que no ha de confundirse con la derivada exterior) en los factores $T^{*1,0}M$.

Tal y como hemos indicado, en el dominio de una carta compleja el fibrado L puede ser trivializado con secciones holomorfas de modo que $A^{0,1}$ –la componente antiholomorfa de la forma de conexión $A = A^{1,0} + A^{0,1}$– se anula. Sobre cada punto de M el conjunto de los jets "acoplados" se pueden identificar con los usuales (o planos) y por tanto llenan el fibrado $\sum_{j=0}^r((T^{*1,0}\mathbb{C}^n)^{\odot j}) \otimes \mathbb{C}^m$ (aunque para una misma sección los correspondientes r-jets en cada punto serán en general diferentes). En efecto, para cada punto podemos encontrar una trivialización por secciones holomorfas cuyos grafos son tangentes a la "distribución horizontal" asociada a la conexión. Por tanto, la forma de conexión se anula en el punto. Esto, junto con la anulación de $F_\nabla^{2,0}$, da el resultado deseado.

Los jets acoplados también comparten otra importante propiedad con los planos: dado cualquier $(r+1)$-jet $\sigma = (\sigma_0, ..., \sigma_{r+1})$ sobre, digamos, el origen, existe α una sección local de $\mathcal{J}_{m,n}^r$ con $\alpha(0) = (\sigma_0, ..., \sigma_r)$ y $\sigma = \partial_\nabla \alpha(0) = \nabla\alpha(0)$; basta usar la misma construcción que en caso plano perturbando linealmente $\pi_r^{r+1}(\sigma) = (\sigma_0, ..., \sigma_r)$ con polinomios complejos homogéneos adecuados, y la anulación de la forma de conexión en el origen.

En este punto el disponer de un modelo local para los r-jets acoplados es suficiente para nuestros propósitos (de hecho hemos descrito el model par y el impar no será sino una versión folliada de este último). En cualquier caso, hacemos notar que es posible dar una definición global de r-jets acoplados que siguen teniendo las propiedades fundamentales de los locales.

Si queremos trabajar de modo global con jets acoplados es necesario usar una conexión en $T^{*1,0}\mathbb{C}^n$, por ejemplo la inducida por la de Levi-Civita, la cual nos dará simetría en el caso de que la métrica sea Kähler. Esto es, podemos escoger *coordenadas holomorfas normales* en las que la matriz de formas de conexión se anula en el origen (o equivalentemente la torsión de la conexión es nula en el origen **[25]**), lo cual –junto con el hecho de que la curvatura tiene tipo $(1,1)$– garantiza que el r-jet acoplado es un tensor simétrico). Una vez más la propiedad que describe un $(r+1)$-jet como el 1-jet de una sección local del fibrado de r-jets holomorfos acoplados, se cumple; de nuevo en este caso hay que elegir una carta holomorfa normal.

Es necesario reseñar que la introducción de una métrica desvirtúa estos jets acoplados globales, pues proyectivizando no corresponderían a los jets usuales. En cualquier caso conviene recordar que, cualquiera que sea la definición de r-jets pseudo-holomorfos que nos dispongamos a dar, será tal que coincidan de modo aproximado con los de los modelos locales (esto es, los jets "acoplados" que acabamos de describir); en los modelos locales la métrica es g_0 (o si se quiere la aportación en métrica g_k de los símbolos de Christoffel y sus derivadas para la conexión de Levi-Civita asociada a g es aproximadamente nula, o dicho de otro modo coincide de modo aproximado con la aportación de g_0, que es nula), por lo que la clase de información que obtendremos de los r-jets pseudo-holomorfos será significativa para el estudio de (sucesiones de) aplicaciones A.H. a espacios proyectivos.

A pesar de todo es interesante observar que en el caso integrable el uso de una métrica Kähler da una noción de r-jets acoplados globales que llenan el fibrado adecuado y para los que se dispone de representaciones locales (que serán instrumentos fundamentales para el estudio de problemas de transversalidad).

La ventaja de los jets acoplados es que simplifican el grupo estructural del fibrado (que pasa a ser vectorial) –que en el caso plano es ${}^0\mathcal{H}_n^r \times Gl(m, \mathbb{C})$– donde ${}^0\mathcal{H}_n^r$ es el grupo de r-jets de gérmenes de transformaciones biholomorfas de $\mathbb{C}^n$ fijando el origen.

Nótese que si quisiésemos tener r-jets acoplados coincidiendo localmente con los planos (imaginemos por un momento que el fibrado es trivial de modo que la forma de conexión es nula), entonces la métrica tendría que ser también plana y las funciones de transición, siendo isometrías, serían lineales. El resultado sería una reducción del grupo estructural a $Gl(n, \mathbb{C}) \times Gl(m, \mathbb{C}) \subset Gl(N, \mathbb{C})$, donde N es la dimensión de la fibra de $\mathcal{J}_{n,m}^r$, que es exactamente lo que se consigue al introducir una conexión.

En la situación impar nuestro modelo es el ya descrito: suponiendo que en la variedad casi-compleja de partida tanto D como J son integrables, pedimos una identificación local adaptada a la foliación horizontal en $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ de modo que J coincida la estructura compleja canónica J_0 y tal que la curvatura restringe a cada hoja como una forma de tipo $(1,1)$ independiente de la coordenada vertical. Para definir los jets holomorfos acoplados (y foliados) en la carta se procede del mismo modo que cuando se definen jets foliados. Para cada punto se restringe la función a cada hoja (suponemos que hemos trivializado de modo que la restricción a cada hoja de la forma de conexión es también independiente de la coordenada vertical) y se considera el correspondiente jet holomorfo acoplado. Por lo tanto sobre cada punto coinciden con los jets acoplados para variedades complejas (aquí se necesita que la estructura compleja sea independiente de la coordenada vertical; al tener la restricción de la forma de conexión también esta propiedad, en esta trivialización cualquier subvariedad en $\mathcal{J}_{n,m}^r$ se extiende de modo natural a una en $\mathcal{J}_{D_h,n,m}^r = \mathcal{J}_{n,m}^r \times \mathbb{R}$ independiente de la coordenada vertical). Si ademas suponemos que el fibrado es $\mathbb{C}^m \otimes L$ en el que la curvatura de L (tal vez foliada) es $-i\omega_0$, entonces tenemos además trivializaciones holomorfas definidas multiplicando una sección cuya forma de conexión (tal vez foliada) es A_0 por $f(z,s) = e^{-|(z,s)|^2/4}$ ó $\check{f}(z,s) = e^{-z\bar{z}/4}$ (independiente de s), que sabemos son soluciones de las correspondientes ecuaciones de Cauchy-Riemann.

De nuevo si quisiésemos dar una definición global –aunque el modelo local es suficiente para nuestros propósitos– sería necesario usar por ejemplo la conexión en $T^{*1,0}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}) \cong T^{*1,0}\mathbb{C}^n$ (a nivel de fibras). Podemos usar la conexión inducida por la restricción de la de Levi-Civita a cada hoja (aquí el tema de la simetría es más delicado).

Por último en presencia de polarizaciones se considera el modelo local $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^{n-g}$, y se trabaja con jets holomorfos foliados a lo largo de las hojas $\mathbb{C}^g \times \{w\}$, denominando al fibrado correspondiente mediante $\mathcal{J}_{\mathbb{C}^g,n,m}^r$ (y que coincide con $\mathcal{J}^r_{g,m} \times \mathbb{C}^{n-g}$). Lo cierto es que a la hora de tratar la transversalidad no estaremos interesados en trabajar en el fibrado de jets foliados, sino que haremos pullback al fibrado de jets holomorfos y trabajaremos ahí, por lo que en su momento estudiaremos algunas propiedades elementales de la aplicación natural $\mathcal{J}^r_{n,m} \to \mathcal{J}^r_{\mathbb{C}^g,n,m}$.

Jets pseudo-holomorfos. Sea E_k una sucesión muy amplia de fibrados vectoriales hermitianos localmente escindibles sobre la variedad casi-compleja (M, D, J, g). Consideramos los fibrados $\mathcal{J}^r_D E_k := \sum_{j=0}^r ((\bar{D}^{*1,0})^{\odot j}) \otimes E_k$.

La métrica hermitiana h inducida en D por definición da lugar a una métrica hermitiana en la componente $(0,1)$ de $D^*_{\mathbb{C}}$. Ocurre lo propio con la componente $(1,0)$, sin más que considerar la misma construcción para $-J$. Usando la inmersión asociada a la métrica tenemos por tanto una métrica hermitiana en $\bar{D}^{*1,0}$, que a su vez induce otra métrica hermitiana en $(\bar{D}^{*1,0})^{\odot r}$; para $\mathcal{J}^r_D E_k$ la métrica apropiada es $h_k := c_k h$, pues en cartas adaptadas es la comparable a $h_0 = g_0$. La conexión de Levi-Civita induce una conexión en $\bar{D}^{*1,0}$ que junto con la aplicación simetrizadora $\mathrm{sym}_j \colon (\bar{D}^{*1,0})^{\otimes j} \to (\bar{D}^{*1,0})^{\odot j}$, da lugar a una conexión en $(\bar{D}^{*1,0})^{\odot j}$. Ésta, y la de E_k dan lugar a una conexión $\nabla_{k,r}$ en $\mathcal{J}^r_D E_k$.

La definición de jets pseudo-holomorfos a lo largo de D (o simplemente jets pseudo-holomorfos o casi-holomorfos) para una sucesión E_k de fibrados vectoriales hermitianos es la siguiente (véase [4]):

Definición 4.1. *Sea τ_k una sección del fibrado (E_k, ∇_k). El r-jet pseudo-holomorfo $j^r_D \tau_k$ es una sección del fibrado $\mathcal{J}^r_D E_k = \sum_r^{j=0} ((\bar{D}^{*1,0})^{\odot j}) \otimes E_k$ definido por inducción tomando el 1-jet pseudo-holomorfo asociado a $\nabla_{k,j}$ para obtener un elemento de $\bar{D}^{*1,0} \otimes (\sum_j^{i=0} (\bar{D}^{*1,0})^{\odot j}) \otimes E_k)$, y luego componiendo con $(sym_{j+1} \otimes I, \cdots, sym_2 \otimes I, I \otimes I, I)$ para obtener una sección de $\mathcal{J}^{j+1}_D E_k$.*

Observación 4.2: La definición anterior incorpora el hecho de que los $(r+1)$-jets están definidos como la simetrización del 1-jet pseudo-holomorfo de una determinada sección (holónoma) de $\mathcal{J}^r_D E_k$ (en realidad en la definición hemos considerado la componente de grado 1 de este 1-jet, que tras simetrizar da las de grado $1, ..., r+1$, a las que posteriormente añadimos τ_k proviniente de la parte de grado cero). Obtenemos el mismo resultado si consideramos todo el 1-jet de la sección de $\mathcal{J}^r_D E_k$ y simetrizamos adecuadamente, pues obtenemos la misma componente homogénea de grado j, $j = 1, ..., r$, proveniente de la de grado 1 y de la de grado 0 del 1-jet de la sección de $\mathcal{J}^r_D E_k$).

Observación 4.3: El r-jet τ_k es suma de $r+1$ componentes homogéneas. Para definir $j^{r+1}_D \tau_k$ no necesitamos todo el r-jet, tan sólo la componente de grado r.

Observación 4.4: La definición de jets pseudo-holomorfos sólo tiene realmente sentido en cuanto a su uso posterior para valores muy grandes de k, ya que la métrica pasa a ser prácticamente plana (en cartas adaptadas a la métrica o curvaturas) y por tanto la parte no simétrica es también aproximadamente nula. Así pues la simetrización tiene un efecto desdeñable y localmente los jets coinciden aproximadamente con los jets acoplados holomorfos definidos en $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ con la estructura compleja J_0 y la métrica plana. En particular, llenan el fibrado $\mathcal{J}_D^r E_k$.

Observación 4.5: Aunque la conexión en $\bar{D}^{*1,0}$ puede no ser compatible con la métrica h_k, lo es en el sentido aproximado. Tampoco esto reviste especial importancia en el caso holomorfo, porque lo que nos interesará será inducir conexiones con curvatura de tipo $(1,1)$, sean o no compatibles con la métrica.

Esencialmente todas las propiedades y construcciones locales pueden trasladarse de E_k a $\mathcal{J}_D^r E_k$. Para cada punto x en M hay disponible una base local de E_k formada por secciones de referencia $\tau_{k,x,1}^{\mathrm{ref}}, ..., \tau_{k,x,m}^{\mathrm{ref}}$. Una vez fijadas coordenadas A.H. (adaptadas a la métrica por ejemplo), tenemos una identificación de $\bar{D}^{*1,0}$ con $T^{*1,0}\mathbb{C}^n$ sin más que considerar $dz_k^i \in T^{*1,0}\mathbb{C}^n$ e identificarla con su componente en $\bar{D}^{*1,0}$. Conviene recordar que esta identificación tiene sentido en bolas de g_k radio $O(1)$, que es la región donde nuestros cálculos han de ser precisos. De lo que ocurre fuera de esta región se encarga el decaimiento gaussiano de la secciones de referencia. Es importante resaltar que aunque escribamos dz_k^i, nos estaremos refiriendo a la imagen en $\bar{D}^{*1,0}$ mediante la correspondiente aplicación de fibrados (definida localmente). La observación que nos interesa es que esta aplicación tiene norma acotada por $O(1)$ y derivadas acotadas por $O(c_k^{-1/2})$, pues se cumple lo propio para dz_k^i como sección local de $\bar{D}^{*1,0}$.

Una vez elegidas trivializaciones (por secciones de referencia) y coordenadas A.H., tenemos una identificación local de $\mathcal{J}_D^r E_k$ con $\mathcal{J}_{n,m}^r$ asociada a la base $\mu_{k,x,I}$ descrita como sigue: para cualquier $(n+1)$-tupla $I = (i_0, i_1, ..., i_n)$, con $1 < i_0 < m$, $0 \leq i_1 + \cdots + i_n \leq r$, definimos $\mu_{k,x,I} := dz_k^{1\odot i_1} \odot \cdots \odot dz_k^{n\odot i_n} \otimes \tau_{k,x,i_0}^{\mathrm{ref}}$. Es elemental comprobar que esta base –en bolas de g_k-radio $O(1)$ en las que es comparable con una unitaria– está formada por secciones A.H. con decaimiento gaussiano con respecto a x.

Por tanto, la sucesión $\mathcal{J}^r E_k$ es muy amplia y localmente escindible, con la salvedad de que en la definición de amplitud se pide que la conexión sea compatible con la estructura hermitiana, aunque esto no tiene importancia pues esta propiedad se usa para la construcción de secciones de referencia, de las que ya se dispone por otro cauce.

Cuando tenemos una polarización G, el fibrado de r-jets pseudo-holomorfos a lo largo de G será $\mathcal{J}_G^r E_k := \sum_{j=0}^r ((\bar{G}^{*1,0})^{\odot j}) \otimes E_k$. Usando la escisión $D = G \oplus G^\perp$ podemos ver $\mathcal{J}_G^r E_k$ como un subfibrado de $\mathcal{J}^r E_k$. Extendiendo por ceros, toda sección del subfibrado lo es también de $\mathcal{J}^r E_k$. Empleamos el mismo proceso de inducción que para la definición de jets a lo largo de D, sólo que después o antes de simetrizar (da el mismo resultado), proyectamos ortogonalmente $TM^{*1,0}$ sobre $\bar{G}^{*1,0}$ (o incluso primero $T^*M_{\mathbb{C}}$ sobre $\bar{G}_{\mathbb{C}}^*$).

En coordenadas A.H. adaptadas a G y utilizando $(g+1)$-tuplas I_g como las anteriores, es decir, sólo para las coordenadas $z_k^1, ..., z_k^g$, se ve que μ_{k,x,I_g}, donde en este caso dz_k^i, $1 \leq i \leq g$, se identifica con su proyección primero sobre $T^{*1,0}M$ y luego sobre $\bar{G}^{*1,0}$, es una base local del fibrado $\mathcal{J}_G^r E_k$ de secciones con decaimiento gaussiano con respecto a x (comparable con una unitaria en bolas de g_k-radio $O(1)$).

En esta situación hay todavía un punto débil. Teniendo en cuenta que la meta final es construir sucesiones de secciones cuyos r-jets sean transversales a determinadas estratificaciones, es necesario que los propios jets sean secciones aproximadamente holomorfas de los correspondientes fibrados para así poder aplicar las técnicas de geometría aproximadamente holomorfa. En particular las bases locales que pretendemos usar son holónomas y responden a la siguiente definición: si I es una de las $(n+1)$ tuplas usadas anteriormente se define $\nu_{k,x,I} := j_D^r \tau_{k,x,I}^{\text{ref}}$, donde $\tau_{k,x,I}^{\text{ref}} := (z_k^1)^{i_1} \cdots (z_k^n)^{i_n} \tau_{k,x,i_0}^{\text{ref}} \in \Gamma(E_k)$. Es elemental comprobar que constituyen una base en g_k-bolas de radio $O(1)$ (comparable con una unitaria) y que las secciones tienen decaimiento gaussiano; el r-jet es aproximadamente una componente de la derivada a lo largo de D, y podemos aplicar las ideas del lema 3.27 para comprobar que cotas en norma C^{r+h} para τ_k se transforman en C^h cotas para $j_D^r \tau_k$, teniéndose buen control sobre el cambio de constantes (ya que se obtiene una relación multiplicativa).

Del mismo modo se cuenta con las bases locales $\nu_{k,x,I_g} := j_G^r \tau_{k,x,I_g}^{\text{ref}}$, donde la definición de $\tau_{k,x,I_g}^{\text{ref}}$ es la obvia. Es fácil que estas secciones tienen decaimiento gaussiano y forman una base del subfibrado en una bola adecuada.

Es una observación de D. Auroux que en el caso Kähler (véase [**5**]) los jets acoplados no son secciones holomorfas del fibrado $\mathcal{J}_{n,m}^r$, con respecto a la estructura compleja inducida por la conexión (debido a la curvatura).

Esta dificultad se supera introduciendo una nueva estructura compleja (una nueva conexión) en $\mathcal{J}_D^r E_k$ (resp. en $\mathcal{J}^r E_k$ en el caso par).

Proposición 4.6. *Sea $E_k \to (M, D, J, g)$ una sucesión muy amplia de fibrados vectoriales hermitianos localmente escindibles. La sucesión $\mathcal{J}_D^r E_k$, que es muy amplia para las conexiones $\nabla_{k,r}$ descritas anteriormente, admite nuevas conexiones ∇_{k,H_r} tal que:*

(1) *$\nabla_{k,r} - \nabla_{k,H_r} \in \bar{D}^{*0,1} \otimes End(\mathcal{J}_D^r E_k)$, y por tanto ambas conexiones definen los mismos jets aproximadamente holomorfos (e igualmente para polarizaciones).*
(2) *Denotemos por F_{k,H_r} y $F_{k,r}$ las curvaturas de ∇_{k,H_r} y $\nabla_{k,r}$. Se tiene $F_{k,H_r} \approxeq F_{k,r}$ y por tanto $(\mathcal{J}_D^r E_k, \nabla_{k,H_r})$ es una sucesión muy amplia. Además, una base local en bolas de g_k-radio fijo se obtiene con $j_D^r \tau_{k,x,I}^{ref}$, donde $\tau_{k,x,j}^{ref}$, $j = 1, ..., m$ es una sucesión de secciones de referencia de E_k.*
(3) *Si $\tau_k \colon M \to E_k$ es una sucesión de secciones C^{r+h}-A.H., $j_D^r \tau_k \colon M \to \mathcal{J}_D^r E_k$ es una sucesión de secciones C^h-A.H. para las conexiones ∇_{k,H_r}. También se tiene que $j_G^r \tau_k \colon M \to \mathcal{J}_G^r E_k \subset \mathcal{J}_D^r E_k$ es una sucesión de secciones C^h-A.H.*

Para jets integrables acoplados (locales) si la curvatura F_i de cada fibrado de línea L_i, $i = 1, ..., m$, restringida a la hojas tiene componentes constantes *(respecto a todas las coordenadas), la anterior modificación da una igualdad para la restricción de las curvaturas a cada hoja, lo que en particular implica que la estructura casi-compleja definida es también integrable (en cada hoja del pullback de D_h a $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m}$). Asimismo, si τ es una sección holomorfa (función a $\mathbb{C}^m$), también $j^r_{D_h,n,m}\tau$ es holomorfa para la nueva estructura.*

PRUEBA. Omitiremos los subíndices k y r en las conexiones siempre que no haya lugar a equívoco.

Sea $\sigma_k = (\sigma_{k,0}, \sigma_{k,1})$ una sección (tal vez local) de $\mathcal{J}^1_D E_k$. Se define $\nabla_{H_1}(\sigma_{k,0}, \sigma_{k,1}) = (\nabla\sigma_{k,0}, \nabla\sigma_{k,1}) + (0, -F_D^{1,1}\sigma_{k,0})$, donde $-F_D^{1,1}\sigma_{k,0} \in \bar{D}^{*0,1} \otimes \bar{D}^{*1,0} \otimes E_k$ (véase [**5**]).

La citada expresión define una conexión. Todas las identidades pueden ser probadas localmente en *bolas de g_k-radio fijo*; es más, como son identidades aproximadas se puede usar la descomposición local de E_k en $L_{k,1} \oplus \ldots \oplus L_{k,m}$ dada por una base local de secciones C^{r+h}-A.H., $\tau_{k,1}, \ldots, \tau_{k,m}$, junto con la conexión diagonal inducida, que seguimos llamando ∇, y la correspondiente curvatura F. Es entonces fácil ver que es suficiente probar el resultado cuando E_k es una sucesión de fibrados de línea.

En una sucesión L_k de fibrados de línea con conexión ∇, la escisión $TM = D \oplus D^\perp$ permite escribir la conexión $\nabla = \partial + \bar{\partial} + \nabla_{D^\perp}$. Se comprueba que como la curvatura para la escisión dada por ella misma es aproximadamente de tipo $(1,1)$, por los resultados del apartado 2.1 de la sección 2, para la escisión dada por la métrica, $F_D^{1,1} \approxeq F_D$, luego $F_D \approxeq \bar{\partial}\partial + \partial\bar{\partial}$.

El término adicional que se añade para definir la conexión modificada se puede entender mejor a través de la expresión de la curvatura actuando sobre secciones aproximadamente holomorfas τ_k. Recordamos que en coordenadas, para definir la curvatura la conexión se ha de componer con el operador $\nabla^1 \colon T^*M \otimes T^*M \otimes L_k \to T^*M \otimes L_k$ definido como sigue: en la carta en la que T^*M está trivializada tenemos definida la conexión plana d en T^*M; el operador ∇^1 es $d \otimes I - I \otimes \nabla$, que compuesto con la aplicación antisimetrizadora $\mathrm{asym}_2 \colon T^*M \otimes T^*M \to \wedge^2 T^*M$ da lugar a la curvatura. Es fácil ver, por ejemplo en coordenadas A.H. adaptadas a la métrica (o a las curvaturas), que F_D es el resultado de considerar la composición de ∇_D con $\nabla^1_D := d_D \otimes I_D - I_D \otimes \nabla_D$, y posteriormente con la antisimetrización.

El término $\partial\bar{\partial}\tau_k \approxeq d_D\bar{\partial}\tau_k \approxeq d\bar{\partial}\tau_k$ se anula en el sentido aproximado: escribimos $\bar{\partial}\tau_k = \sum_{i=1}^n d\bar{z}^i_k \otimes g_i\tau_k$, donde $d\bar{z}^i_k \in \bar{D}^{*0,1}$. Por tanto, $(d_D \otimes I_D - I_D \otimes \nabla_D) \circ \bar{\partial}\tau_k \approxeq -(I_D \otimes \nabla_D) \circ \bar{\partial}\tau_k$. Luego para una sucesión τ_k aproximadamente holomorfa, $F_D\tau_k \approxeq \mathrm{asym}_2(-\bar{\partial}\partial\tau_k)$ (las aplicaciones de antisimetrización y simetrización son de orden $O(1)$ y tienen derivadas de tamaño $O(c_k^{-1/2})$).

El término $\bar{\partial}\partial$ de la curvatura se puede escribir como la composición de $-\bar{\partial} \otimes \partial$ con la aplicación antisimetrizadora. En definitiva podemos concluir que la conexión modificada actúa sobre la sucesión $j^1_D\tau_k$ aproximadamente añadiendo el término no antisimetrizado de la componente de la curvatura en D:

$$\nabla_H(\tau_k, \partial\tau_k) \approxeq (\nabla\tau_k, \nabla\partial\tau_k - \bar{\partial} \otimes \partial\tau_k).$$

Así,

$$\nabla_{H,D}(\tau_k, \partial\tau_k) \approxeq (\nabla_D \tau_k, \partial\bar{\partial}\tau_k + \bar{\partial}\partial\tau_k - \bar{\partial}\otimes\partial\tau_k) \approxeq (\nabla_D\tau_k, \partial\bar{\partial}\tau_k),$$

y por tanto,

$$\bar{\partial}_H j^1_D \tau_k \approxeq (\bar{\partial}\tau_k, 0) \approxeq 0.$$

En el caso integrable lo que añadimos es exactamente $-\bar{\partial}\otimes\partial$ y el 1-jet de una sección holomorfa es evidentemente holomorfo para la nueva conexión.

Para comprobar las identidades relativas a la conexión modificada usamos cartas adaptadas a la métrica (o a las curvaturas también), y las anteriormente mencionada bases locales de $\bar{D}^{*1,0}$ y $\bar{D}^{*0,1}$, completadas con ds_k a una base local de $T^*M \otimes \mathbb{C}$.

Considérese la base local de $\mathcal{J}^1_D L_k$ dada por $(0, dz^1_k) \otimes \tau_k, ..., (0, dz^n_k) \otimes \tau_k, (1,0) \otimes \tau_k$. La expresión para la primera derivada covariante es:

$$\begin{aligned} \nabla_H(0, dz^i_k) &= (0, \nabla dz^i_k),\ i = 1, ..., n, \\ \nabla_H(1,0) &= (\nabla 1, 0) = (A^i_k dz^i_k + B^i_k d\bar{z}^i_k + C_k ds_k, -F^{1,1}). \end{aligned}$$

La componente de curvatura de ∇ en D se escribe:

$$F_D \approxeq \sum_{i,j=1}^{n} \Omega_{ij} dz^i_k \wedge d\bar{z}^j_k, \quad \Omega_{ij} = \frac{\partial B^j_k}{\partial z^i_k} - \frac{\partial A^i_k}{\partial \bar{z}^j_k}.$$

Para el subfibrado generado por $(0, dz^1_k), ..., (0, dz^n_k)$, la curvatura de ∇_H es la de ∇.

En cuanto a la sección $(1,0)$,

$$\begin{aligned} \nabla^2_H(1,0) &\approxeq \nabla_H(A^i_k dz^i_k + B^i_k d\bar{z}^i_k + C_k ds_k, \sum_{i,j=1}^{n} \Omega_{ij} d\bar{z}^i_k \otimes dz^j_k) \approxeq \\ &\approxeq (F_\nabla 1, \sum_{i,j,l=1}^{n} (\Omega_{ij} A^l_k d\bar{z}^i_k \wedge dz^l_k \otimes dz^j_k + \Omega_{ij} B^l_k d\bar{z}^i_k \wedge d\bar{z}^l_k \otimes dz^j_k) + \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} (C_k d\bar{z}^i_k \wedge ds_k \otimes dz^j_k) + \\ &+ \sum_{l,i,j=1}^{n} (A^l_k \Omega_{ij} dz^l_k \wedge d\bar{z}^i_k \otimes dz^j_k + B^l_k \Omega_{ij} d\bar{z}^l_k \wedge d\bar{z}^i_k \otimes dz^j_k) + \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} (C_k ds_k \wedge d\bar{z}^i_k \otimes dz^j_k)) = (F_\nabla 1, 0). \end{aligned}$$

Obsérvese que cuando la curvatura a lo largo de D es de tipo $(1,1)$ y $d\Omega_{ij} = 0$, como por ejemplo en cartas de Darboux, las igualdades anteriores se verifican de modo exacto en el caso integrable. Éste es exactamente el motivo por el cual son satisfechas en el sentido aproximado en nuestra situación, porque en el caso integrable tenemos igualdades.

Hay otro modo de probar este resultado que se basa en la elección de una base especial de secciones holónomas. Dada $\tau^{\mathrm{ref}}_{k,x}$ A.H., la componente de la correspondiente forma de conexión en $\bar{D}^*$ pertenece aproximadamente al subespacio $\bar{D}^{*1,0}$. Se considera la base local $j^1_D(z^l_k\tau_k)$, donde z^l_k es un monomio de grado ≤ 1 (no es estrictamente necesario tomar secciones de referencia, basta con elegir τ_k A.H. tal que $j^1_D(z^l_k\tau_k)$ resulten ser una base local comparable con una unitaria en una bola de g_k-radio constante). Para los cálculos que siguen τ_k puede ser cualquier sucesión A.H.

$$\nabla_H(z^l_k\tau_k, \partial(z^l_k\tau_k)) \approxeq (\nabla z^l_k\tau_k, \nabla\partial(z^l_k\tau_k) - \bar{\partial}\otimes\partial z^l_k\tau_k),$$

y la curvatura se puede escribir:

$$F_H(z^l_k\tau_k, \partial(z^l_k\tau_k)) \approxeq F(z^l_k\tau_k, \partial(z^l_k\tau_k)) + (0, -\nabla\wedge\bar{\partial}\otimes\partial(z^l_k\tau_k) - F^{1,1}_D\wedge\nabla(z^l_k\tau_k)) \tag{4.3}$$

Siendo más precisos, el segundo sumando se puede computar como sigue:

$$\begin{aligned} &-\nabla\wedge\bar{\partial}\otimes\partial(z^l_k\tau_k) - F^{1,1}_D\wedge\nabla(z^l_k\tau_k) \approxeq \\ &-\mathrm{asym}_2(d\otimes I - I\otimes\nabla(-\bar{\partial}\otimes\partial(z^l_k\tau_k))) + \mathrm{asym}_2(I\otimes\bar{\partial}\otimes\partial(\nabla z^l_k\tau_k).) \end{aligned} \tag{4.4}$$

El operador $-\bar{\partial}\otimes\partial$ es aproximadamente tensorial (porque $F^{1,1}_D$ lo es). Por tanto, escribiendo $\nabla(z^l_k\tau_k) \approxeq \partial(z^l_k\tau_k) + Cds_k\otimes\tau_k = \alpha\otimes\tau_k + Cds_k\otimes\tau_k$, $\alpha\in\bar{D}^{*1,0}$, la segunda componente en el miembro de la derecha de 4.4 es:

$$\begin{aligned} \mathrm{asym}_2(I\otimes\bar{\partial}\otimes\partial(\nabla z^l_k\tau_k)) &\approxeq \mathrm{asym}_2(I\otimes\bar{\partial}\otimes\partial(\alpha\otimes\tau_k + Cds_k\otimes\tau_k)) \\ &\approxeq \sum_{i,j} -\Omega_{ij}((\alpha + Cds_k)\wedge d\bar{z}^j_k\otimes dz^i_k\otimes\tau_k \end{aligned}$$

Las derivadas (usuales) de los coeficientes de $F^{1,1}_D$ son de orden $O(c_k^{-1/2})$, de modo que la primera componente es:

$$\begin{aligned} -\mathrm{asym}_2(d\otimes I - I\otimes\nabla(-\bar{\partial}\otimes\partial(z^l_k\tau_k))) &\approxeq \sum_{i,j} dz^l_k\otimes\Omega_{ij}\otimes d\bar{z}^j_k\otimes dz^i_k\otimes\tau_k - \\ -z^l_k\Omega_{ij}d\bar{z}^j_k\otimes dz^i_k\otimes(\partial\tau_k + Cds_k\otimes\tau_k) &\approxeq \sum_{i,j}\Omega_{ij}(\alpha + Cds_k)\wedge d\bar{z}^j_k\otimes dz^i_k\otimes\tau_k \end{aligned}$$

Por tanto, $F_H \approxeq F$.

Para probar que los 1-jets de secciones C^r-A.H. son C^{r-1}-A.H., basta ver que lo que se ha añadido a la nueva conexión es parte de la curvatura, cuyos coeficientes son de orden $O(1)$ y sus derivadas acotadas por $O(c_k^{-1/2})$.

La componente de grado 0 de la derivada covariante de orden r de $j^1_D\tau_k = (\tau_k, \partial\tau_k)$ es $\nabla^r\tau_k$. El término de grado 1 es $\nabla^r\partial\tau_k$ más r *sumandos homogéneos de orden* $r+1$, que son productos de derivadas $\nabla^j\tau_k$ (de orden j) y derivadas $\nabla^{r-j-2}F^{1,1}_D$ (de orden $r-j$). Las cotas para la derivada total son obvias. Aquellas para la derivada en las direcciones de D se siguen del hecho de que para $k >> 0$ la mezcla de tipos en las derivadas (de acuerdo con la escisión de los fibrados $T^*M^{\otimes r}\otimes\mathcal{J}^1_D E_k$ inducida por la métrica) es de tamaño $O(c_k^{-1/2})$. En particular la cota C^D_r para $\nabla^r_D\tau_k$ se transforma en $C'C^D_r$ para $\nabla^{r-1}_D j^1_D\tau_k$ (aquí se aplican las ideas y resultados del lema 3.27).

Las cotas para la componente antiholomorfa se siguen de similares consideraciones y de $\bar{\partial}_H(\tau_k, \partial\tau_k) \approxeq (\bar{\partial}\tau_k, \partial\bar{\partial}\tau_k)$, cuando τ_k es una sucesión de secciones A.H.

Siendo estrictos, hay que notar que todas las igualdades aproximadas para secciones de $\mathcal{J}^1_D L_k$ se han computado usando las conexiones $\nabla_{k,1}$. Pero de las ideas anteriores se deduce fácilmente que igualdades aproximadas para las conexiones $\nabla_{k,1}$ implican igualdades aproximadas para ∇_{k,H_1}.

Se comprueba fácilmente en cartas adaptadas (a la métrica por ejemplo) que las $j^1_D(\tau^{\text{ref}}_{k,x,I})$ son sucesiones de secciones A.H con decaimiento gaussiano formando una base local.

Para poder razonar por inducción necesitamos que los fibrados $\mathcal{J}^r_D E_k$, $\mathcal{J}^1_D \mathcal{J}^r_D E_k$ admitan una conexión modificada con las propiedades anteriores. No podemos concluirlo directamente pues en la prueba anterior hemos supuesto que partíamos de un fibrado de línea. En cualquier caso la prueba anterior también funciona para estos fibrados aplicando la propiedad (2) del enunciado de esta proposición, que nos dice que la curvatura es aproximadamente tensorial en el sentido de que para ξ_k sección de $\mathcal{J}^r_D E_k$, $F^{1,1}_{H,D}\xi_k$ es aproximadamente proporcional a ξ_k (con igualdad en el caso integrable). Con esta propiedad es fácil ver que de nuevo si ξ_k es A.H. la modificación, que coincide de modo aproximado con $-\bar{\partial} \otimes \partial\xi_k$, es de nuevo un operador aproximadamente tensorial. Se verifica que la prueba para fibrados de línea que desarrolla la ecuación 4.3 (y acaba cancelando un par de términos) funciona también para el fibrado $\mathcal{J}^r_D E_k$. Además, conviene hacer notar de nuevo que para el modelo local (en bolas de g_0-radio $O(1)$) estamos induciendo en cada hoja de $\hat{D}_h$ una estructura casi-compleja integrable que ademas es constante en las coordenadas de la base (la curvatura no cambia, y ya tenía esta propiedad).

Asumamos que la estructura compleja inicial en $\mathcal{J}^r_D E_k$ ha sido modificada de modo que $(\mathcal{J}^r_D E_k, \nabla_{H_r})$ es una sucesión muy amplia de fibrados para la cual los jets de cierta base local de secciones A.H. conforman una base local de secciones A.H. Para poder aplicar inducción hacemos la identificación usual de $\mathcal{J}^{r+1}_D E_k$ con el subfibrado de $\mathcal{J}^1_D \mathcal{J}^r_D E_k$ generado por secciones holónomas. El fibrado $\mathcal{J}^1_D \mathcal{J}^r_D E_k$ tiene una conexión $\tilde{\nabla}_{H_r}$ (usando ∇_g en $\bar{D}^{*1,0}$ y ∇_{H_r} en $\mathcal{J}^r_D E_k$) que por inducción puede ser modificada a $\nabla_{H_{r+1}}$. Pretendemos probar que el subfibrado $\mathcal{J}^{r+1}_D E_k$ hereda una conexión con las propiedades deseadas.

Veamos lo que ocurre en la situación integrable: consideremos la base $\tau^{\text{ref}}_{k,x,I}$, donde $\tau^{\text{ref}}_{k,x,j}$ es holomorfa. Por definición, $j^{r+1}_{D_h}\tau^{\text{ref}}_{k,x,I} = j^1_{D_h}(j^r_{D_h}\tau^{\text{ref}}_{k,x,I})$. Las conexiones inducidas por ∇ en $\mathcal{J}^1_{D_h,n}\mathcal{J}^r_{D_h,n,m}$ y $\mathcal{J}^{r+1}_{D_h,n,m}$ son la misma. Para el primer fibrado, la componentes holomorfa y vertical de esta conexión inducida coinciden por inducción con las de $\tilde{\nabla}_{H_r}$ y también con las de la modificada $\nabla_{H_{r+1}}$. Finalmente

$$
\begin{aligned}
\nabla_{H_{r+1}} j^{r+1}_{D_h} \tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I} &= \left(\nabla_{H_{r+1}}\right) j^1_{D_h}(j^r_{D_h}\tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I}) = \\
&= \left(\partial_{H_{r+1}} + \nabla_{H_{r+1},\frac{\partial}{\partial s_k}}\right) j^1_{D_h}(j^r_{D_h}\tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I}) = \\
&= \left(\partial + \nabla_{\frac{\partial}{\partial s_k}}\right) j^1_{D_h}(j^r_{D_h}\tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I}) = \left(\partial + \nabla_{\frac{\partial}{\partial s_k}}\right) j^{r+1}_{D_h}\tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I},
\end{aligned}
$$

que por definición es una 1-forma con coeficientes en $\mathcal{J}^{r+1}_{D_h,n,m}$ (pues al final nos quedan las componentes holomorfa y vertical de la conexión inducida por ∇). Como la conexión preserva el subfibrado para una base local, ∇_H define una conexión en $\mathcal{J}^{r+1}_{D_h,n,m}$. Una vez más estamos dotando al fibrado $\mathcal{J}^{r+1}_{D_h,n,m}$ de una estructura casi-compleja integrable en cada una las hojas del espacio total.

En el caso no integrable usamos la aplicación simetrizadora

$$\mathrm{sym}^{r+1} := (\mathrm{sym}_{r+1} \otimes I, \cdots, \mathrm{sym}_2 \otimes I, I \otimes I, I) \colon \mathcal{J}^1_D \mathcal{J}^r_D E_k \to \mathcal{J}^{r+1}_D E_k,$$

compuesta con $\tilde{\nabla}_{H_r}$ para definir una conexión $\nabla_{H_{r+1}}$ en $\mathcal{J}^{r+1}_D E_k$. Nótese que la componente holomorfa $\partial_{H_{r+1}}$ y la vertical $\nabla_{H_{r+1},D^\perp}$ de esta conexión coinciden con las correspondientes de ∇, la conexión original de $\mathcal{J}^{r+1}_D E_k$. Para la base local $j^{r+1}_D \tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I}$,

$$\nabla_{H_{r+1}} j^{r+1}_D \tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I} = \bar{\partial}_{H_{r+1}} j^{r+1}_D \tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I} + \partial_{H_{r+1}} j^{r+1}_D \tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I} + \nabla_{H_{r+1},D^\perp} j^{r+1}_D \tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I}.$$

Por la observación anterior, el segundo y el tercer sumando pertenecen a $\mathcal{J}^{r+1}_D E_k$. El primero es, por inducción, de orden $O(c_k^{-1/2})$. Como $j^{r+1}_D \tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I}$ es una base local, el tamaño de la componente no simétrica que tenemos que restar de $\tilde{\nabla}_{H_r} j^{r+1}_D \tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I}$ para definir $\nabla_{H_{r+1}} j^{r+1}_D \tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I}$ está mayorado por $O(c_k^{-1/2})$; de hecho, todas sus derivadas (para la conexión $\tilde{\nabla}_{H_r}$) están acotadas por la misma cantidad (hay que usar las cotas en la componente antiholomorfa junto con las cotas de orden $O(1)$ para sym^{r+1} y para sus derivadas).

Geométricamente, la distribución que define la conexión en el espacio tangente de $\mathcal{J}^1_D \mathcal{J}^r_D E_k$ está, en los puntos de $\mathcal{J}^{r+1}_D E_k$, a distancia $O(c_k^{-1/2})$ del espacio tangente del subfibrado (y todas sus derivadas). Por tanto las mismas igualdades aproximadas valdrán para ambas conexiones.

En cuanto a la curvatura, usando la base local $j^{r+1}_D \tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I}$ se tiene:

$$F_{H_{r+1}} = \mathrm{sym}^{r+1} \circ \tilde{\nabla}_{H_r} \wedge \mathrm{sym}^{r+1} \circ \tilde{\nabla}_{H_r} \approxeq F_{\tilde{\nabla}_{H_r}} \approxeq F^{1,1},$$

donde $F^{1,1}$ es la componente $(1,1)$ de la conexión original de $\mathcal{J}^{r+1}_D E_k$. La igualdad aproximada anterior es válida tanto para $\tilde{\nabla}_{H_r}$ como para $\nabla_{H_{r+1}}$.

Usando consideraciones similares se deduce que el $(r+1)$-jet de una sucesión de secciones C^{r+1+h}-A.H. de E_k es una sucesión de secciones C^h-A.H. de $(\mathcal{J}^{r+1}_D E_k, \nabla_{H_{r+1}})$. El único cambio es la composición con la aplicación simetrizadora. Se comprueba que las diferentes escisiones conmutan con la simetrización. Esto, junto con las cotas en dicha aplicación reduce la afirmación sobre las cotas a la correspondiente para las sucesión $j^1_D j^1_D \tau_k$ y la conexión $\tilde{\nabla}_{H_r}$, la cual se cumple por inducción.

El decaimiento gaussiano de $j^{r+1}_D \tau^{\text{ref}}_{k,x,I}$ se prueba de modo similar.

En lo que se refiere a la teoría relativa, para cualquier sucesión τ_k de secciones C^{r+h}-A.H. de E_k, se tiene que $j^r_G \tau_k$ es una sucesión C^h-A.H. de $\mathcal{J}^r E_k$. La comprobación se puede hacer en bolas de g_k-radio fijo. En particular, en coordenadas aproximadamente holomorfas compatibles con G. En esa situación ocurre aproximadamente lo que en el modelo plano. En éste último, $j^r_G \tau_k$ es una componente del vector $j^r \tau_k$, e igualmente ocurre con las derivadas $\nabla^p_{H_r} j^r_G \tau_k$ y $\nabla^{p-1}_{H_r} \bar{\partial}_{H_r} j^r_G \tau_k$, $p = 0, ..., h$.

El decaimiento gaussiano de las secciones $j^r \tau^{\text{ref}}_{k,x,I_g}$ del subfibrado $\mathcal{J}^r_G E_k$ se sigue de consideraciones similares, así como el hecho de que constituyen una base local del subfibrado comparable con una unitaria en la bola de radio requerido □

Observación 4.7: En esta proposición el hecho de que $F_{H_1,k} \approxeq F_k$ tiene importantes consecuencias. En coordenadas A.H. y tras la identificación local de $\bar{D}^{*1,0}$ con $T^{*1,0}\mathbb{C}^n$, la forma de conexión de ∇_H es aproximadamente la suma de las forma de conexión $A_{k,j}$ en $L_{k,j}$ (para una trivialización adecuada), más la suma de curvaturas $\omega_{k,j}$. Tenemos las cotas $O(1)$ para la norma de las curvaturas y $O(c_k^{-1/2})$ para las derivadas de las componentes en la carta; en el caso de las conexiones, las cotas de $O(1)$ son para la norma de la primera derivada, y de orden $O(c_k^{-1/2})$ para el resto de derivadas. En consecuencia tendremos la misma clase de control sobre la métrica $\hat{g}_k$ inducida en el espacio total de $\mathcal{J}^1_D E_k$ por la de la base, la fibra y la conexión. Por inducción se obtiene la misma clase de control para las sucesiones $\mathcal{J}^r_D E_k$. Para fibrados de la forma $\mathbb{C}^m \otimes L^{\otimes k}$, si la escisión dada por la métrica coincide con la de las curvaturas (como en el caso de las variedades calibradas), escogiendo las trivializaciones adecuadas la conexión y curvatura coinciden aproximadamente con m copias de A_0 y ω_0.

Esta propiedad supondrá que siempre que tengamos alguna clase de estructura en los fibrados de jets, por ejemplo, una sucesión de estratificaciones, tal que en las citadas trivializaciones son independientes de k y x, entonces las diferentes cotas asociadas a elementos de dichas estratificaciones (tomadas para el modelo y con elementos métricos euclídeos) no dependerán ni de k ni de x.

También usaremos más adelante el hecho de que en el caso holomorfo se tienen igualdades (se induce una estructura holomorfa integrable en $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m}$ para la que el r-jet de una sección holomorfa de $\mathbb{C}^m \otimes L$ es holomorfa para esta nueva estructura).

5. Estratificaciones aproximadamente holomorfas y transversalidad

Como hemos venido indicando, el objetivo de la teoría es ser capaces de perturbar ligeramente sucesiones de secciones A.H. (principalmente de los fibrados $\mathcal{J}^r_D E_k$) de modo que sean transversales a ciertas estratificaciones. Es precisamente el hecho de ser secciones A.H. lo que permitirá la existencia de dicha perturbación. Hasta ahora hemos trabajado con sucesiones de fibrados vectoriales (como la de jets de orden r), pero veremos que hay otras situaciones de interés en la que el fibrado no es vectorial. Por ello pasamos a considerar sucesiones de fibrados F_k con fibra una variedad casi-compleja (de dimensión par), y una conexión en el fibrado compatible con la métrica y la estructura casi-compleja. Para estos fibrados casi-complejos algunos de los conceptos previos se pueden generalizar inmediatamente.

Definición 5.1. *Dadas constantes positivas c, C^D, C, una sección τ de un fibrado casi complejo es C^r-aproximadamente holomorfa con cotas c, C^D, C (C^r-A.H.(C^D, C, c)), si se cumplen las siguientes desigualdades:*

$$\begin{aligned} |\tau| + |\nabla_D \tau| + \ldots + |\nabla^r_D \tau| &\leq C^D \\ |\nabla \tau| + \ldots + |\nabla^r \tau| &\leq C \\ |\bar\partial \tau| + \ldots + |\nabla^{r-1} \bar\partial \tau| &\leq C c^{-1/2} \end{aligned}$$

Cuando $c_k \to \infty$, una sucesión de secciones de una sucesión de fibrados casi complejos es C^r-aproximadamente holomorfa (C^r-A.H.) si existen constantes $C^D, C > 0$ de modo que las secciones τ_k son C^r- A.H.(C^D, C, c_k).

Hablamos de secciones A.H. cuando se tienen sucesiones de constantes (C^D_j, C_j) controlando las normas de ∇^j y $\nabla^j_D, \nabla^{j-1}\bar\partial$ (esta última multiplicada por $c_k^{-1/2}$) para todo $j \in \mathbb{N}$.

5.1. Estratificaciones aproximadamente holomorfas

Los espacios totales de una sucesión de fibrados casi complejos heredan una métrica $\hat g_k$, una distribución $\hat D$ de la misma codimensión que D y una estructura casi-compleja $\hat J_k$. Consideraremos estratificaciones $\mathcal{S} = (S^a_k), a \in A_k$, cuyos estratos S^a_k cortan cada fibra con ángulo mínimo acotado inferiormente. Asimismo los estratos verificarán una serie de condiciones, que en determinadas circunstancias serán equivalentes a su holomorfía aproximada con respecto a g_k y $\hat J_k$. La estratificación será finita en el sentido de que $\#(A_k)$ estará acotado independientemente de k y la frontera de cada estrato $\partial S^a_k = \bar S^b_k - S^a_k$ será unión de otros de menor dimensión:

$$\partial S^a_k = \bigcup_{b<a} S^b_k$$

Finalmente las estratificaciones serán de Whitney de modo uniforme.

Definición 5.2. *(ver [3]) Sea F_k una sucesión de fibrados casi complejos sobre (M, D, J, g), y $(S_k^a)_{a \in A_k}$ estratificaciones de Whitney finitas de F_k cuyos estratos son transversales a las fibras. Sea $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. La sucesión de estratificaciones es C^r-aproximadamente holomorfa (C^r-A.H.) si para cualquier abierto acotado U_k del espacio total F_k y cualquier $\epsilon > 0$, es posible encontrar constantes positivas $C_\epsilon^D, C_\epsilon, \rho_\epsilon$ que sólo dependan de ϵ y del tamaño de U_k, pero no de k, de modo que para cualquier punto $y \in U_k$ en un estrato S_k^a verificando $d_{\hat{g}_k}(y, \partial S_k^a) > \epsilon$, existen funciones a valores complejos $f_1, ..., f_p$ tal que $B_{\hat{g}_k}(x, \rho_\epsilon) \cap S_k^a$ viene dado por $f_1 = ... = f_p = 0$, y se tiene:*

1. *(Transversalidad uniforme con respecto a las fibras + comparabilidad transversal) La restricción de $df_1 \wedge ... \wedge df_n$ a $T^v F_k$, el espacio tangente a las fibras, está acotada inferiormente por ρ_ϵ.*
2. *(Holomorfía aproximada a lo largo de las fibras) La restricción de la función $f = (f_1, ..., f_p)$ a cada fibra es C^r-A.H.(C_ϵ^D, c_k).*
3. *(Holomorfía aproximada horizontal + variación holomorfa de la restricción a la fibra + variación estimada de la restricción a la fibra) Para cualquier λ^D, λ, c_k, y τ C^r-A.H.$(\lambda^D, \lambda, c_k)$ sección local de F_k con imagen intersecando a $B_{\hat{g}_k}(y, \rho_\epsilon)$, $f_j \circ \tau$ es C^r-A.H.$(\lambda^D C_\epsilon^D, \lambda C_\epsilon, c_k)$. También se tiene que para θ una sección local de $\tau^* T^v F_k$ que sea C^r-A.H.$(\lambda^D, \lambda, c_k)$, $df_\tau(\theta)$ es C^r-A.H.$(\lambda^D C_\epsilon^D, \lambda C_\epsilon, c_k)$.*
4. *(Condición de Whitney estimada) $\forall y \in S_k^b$ con $S_k^a \subset \partial S_k^b$, el ángulo máximo entre la distribución tangente a los conjuntos de nivel de $f = (f_1, ..., f_p)$ y el tangente a S_k^b está mayorado por $C_\epsilon d_{\hat{g}_k}(y, S_k^a)$.*

Observación 5.3: Tal y como ya mencionamos, para las principales aplicaciones de nuestra teoría necesitaremos estratificaciones en las que tengamos control sobre todas las derivadas (estratificaciones A.H.).

Observación 5.4: Cuando D es todo el tangente recuperamos la definición dada por D. Auroux en [4].

Descripción local de las estratificaciones C^r-A.H. Es posible dar una descripción geométrica local de una sucesión de estratificaciones C^r-A.H. para aquellas sucesiones de fibrados casi-complejos $p_k \colon (F_k, \hat{g}_k) \to (M, g_k)$ para las que se dispone de cartas 1-comparables para cada $y \in \coprod_{k \in \mathbb{N}} F_k$ (las constantes fijas para toda la familia).

Un primer ejemplo de sucesiones con esta propiedad son los fibrados triviales con conexión trivial y fibra $(Q_k, \bar{g})$, Q_k compacta. Basta fijar una familia de cartas r-comparables en la fibra y multiplicarla por una familia de coordenadas aproximadamente holomorfas para obtener una familia de cartas r-comparables en el espacio total y para todo k.

La segunda clase es la ya citada de sucesiones muy amplia de fibrados hermitianos con conexión (lineal). En el dominio de coordenadas aproximadamente holomorfas se toma una base del fibrado comparable con una base unitaria. Si en esta base la forma de conexión está acotada (o equivalentemente si el ángulo mínimo entre la fibra y la distribución asociada a la conexión está acotado inferiormente), entonces se obtienen cartas comparables al multiplicar las coordenadas aproximadamente holomorfas con coordenadas en bolas de un radio acotado superiormente en la fibra (la fibra está identificada con $\mathbb{C}^N$ con una métrica comparable con la euclídea). Una cota en la curvatura de orden $O(1)$ da una cota del mismo orden para los símbolos de Christoffel. En general, cotas de orden $O(1)$ en las derivadas parciales de orden $r-1$ de la curvatura dan cotas del mismo orden para las derivadas de orden $r-1$ de los símbolos de Christoffel.

Para nuestras aplicaciones siempre trabajaremos con una de las dos clases de sucesiones de fibrados casi complejos mencionadas. Además dichas sucesiones tendrán siempre "suficientes" secciones aproximadamente holomorfas. Siendo más precisos, para cada $y \in F_k$, se podrá encontrar τ C^r-A.H. (con constantes C^D, C sólo dependiendo en la norma de y) con $\tau(p_k(y)) = y$. Igualmente para cualquier $u \in \tau^*T^vF_k$, existirá $\theta \in \Gamma(\tau^*T^vF_k)$ C^r-A.H. con $\theta(p(y)) = u$ (las constantes dependiendo de las normas de y y u).

En las cartas 1-comparables de F_k, y para estratificaciones C^2-A.H., las cotas no relativas a componentes antiholomorfas requeridas en las propiedades (2) y (3) de la definicion 5.2 se siguen cotas de (uniformes) de orden $O(1)$ para $|f|$, para $|df|$ –la norma de la derivada– y para $|d^2f|$ –la norma de las derivadas parciales de orden 2– medidas con la métrica inducida o con la euclídea (de modo equivalente se puede considerar en vez de las derivadas parciales segundas d^2f, que sólo está definida en la carta correspondiente, ∇df). Si nuestras cartas son r-comparables, se obtienen resultados similares para estratificaciones C^r-A.H. y $|d^jf|$, $j = 0, ..., r$, las normas de las derivadas parciales de orden menor o igual que r.

También se comprueba que la parte relativa a las componentes antiholomorfas en las propiedades (2) y (3) de 5.2 se sigue, en cartas r-comparables, de la afirmación correspondiente para $d^j\bar{\partial}f$, $j = 0, ..., r-1$, (las derivadas parciales de orden menor o igual que r de $\bar{\partial}f$), donde la estructura casi-compleja usada puede ser cualquiera que coincida aproximadamente con la inducida en la carta. Otra posibilidad –cuando los F_k son fibrados lineales– es en coordenadas A.H. trivializar la fibra con secciones A.H. de modo que se identifique con $\mathbb{C}^N$ y hacer las comprobaciones usando la estructura casi-compleja $J_0^{n+N} := J_0^n \times J_0^N$. En efecto, al ser la forma de conexión una aplicación lineal compleja, de la cota para la parte antiholomorfa con respecto a la estructura producto de sigue la buscada para $\hat{J}$; para las derivadas subsiguientes sólo hace falta control de orden $O(1)$ en las derivadas que relacionan la distribución de la conexión producto con la de ∇. Dicho control en las direcciones verticales se sigue del hecho de que la conexión es lineal y en las "horizontales" de las derivadas de las formas de conexión (curvatura,...).

Estas cartas 1-comparables en el espacio total de los fibrados pueden ser modificadas para otros propósitos de modo que $f\colon \mathbb{R}^{2n+1+2N} \to \mathbb{R}^{2p}$, que es una submersión, sea la proyección en $2p$-coordenadas.

En efecto, denotemos a la foliación definida por f mediante $\ker df$. Consideramos el plano tangente a la hoja de $\ker df$ por el origen y lo modificamos mediante una transformación lineal para hacerlo coincidir con el lugar de ceros de $2n+1+2N-2p$ coordenadas, que denotamos por x, y de modo que en lugar de ceros del resto de las coordenadas, que designamos mediante t, sea un subespacio de la fibra; la norma de esta transformación lineal está uniformemente acotada pues las fibras tienen ángulo mínimo con respecto a las hojas de $\ker df$ acotado inferiormente (proviene de la cota inferior para $|df_1 \wedge \cdots \wedge df_p|$ en la fibra que figura en la condición (1) de 5.2). Definimos $\phi(x,t) = (x, f(x,t))$. La cota en la norma de las derivadas parciales segundas de f implica que los espacios tangentes a las hojas de la foliación local no varían mucho. En particular, existe una constante $r_1 > 0$ de modo que $\phi\colon B_{g_0}(0,r_1) \to \mathbb{R}^{2n}$ es un difeomorfismo. También hay constantes positivas r_2, r_3 tal que $B_{g_0}(f(0),r_2) \subset \phi(B_{g_0}(0,r_1)) \subset B_{g_0}(f(0),r_3)$. La existencia de r_3 se sigue de la cota para $|df|$. El ortogonal (euclídeo) a la fibra en el origen $t = 0$, es transversal a todas las fibras cuando se le traslada a cualquier punto de $B_{g_0}(0,r_1)$. En cada punto la proyección del ortogonal a la fibra a este espacio vectorial tiene su norma acotada (controlada por $|d^2 f|$). La imagen de los vectores unitarios de este subespacio mediante df es un elipsoide cuya distancia al origen está acotada inferiormente (de nuevo por la cota inferior para $|df_1 \wedge \cdots \wedge df_p|$ en la fibra y porque df es aproximadamente compleja en $\hat{D}$). De todo esto se infiere una cota inferior para el determinante de ϕ (en particular la imagen del plano $t = 0$ contiene una bola euclídea de cierto radio r_2).

Por tanto la métrica inducida por $\hat{g}_k$ es comparable a la euclídea. Si usamos la cota superior en $|d^2 f|$ obtenemos una cota superior para los símbolos de Christoffel de modo que la métrica inducida es comparable a orden 1 con la euclídea.

5.2. Transversalidad estimada

Pretendemos conseguir transversalidad de secciones A.H. a estratificaciones aproximadamente holomorfas en las direcciones de D. Para lograrlo, se transforma el problema de transversalidad local en uno para funciones mediante el uso de bases de secciones de referencia. Se resuelve el problema localmente y se añaden todas las perturbaciones. Dichas perturbaciones ocurrirán en pequeños abiertos con intersección no vacía, pues aunque las bases de referencia son válidas en abiertos de g_k-radio $O(1)$, las "colas" de las secciones de referencia llegan hasta distancias de orden $O(c_k^{1/6})$. El modo de asegurarse que no hay interferencia entre ellas es usar el concepto más fuerte de *transversalidad estimada* en vez de la noción usual de transversalidad.

Definición 5.5. *Sea $(E,\nabla) \to (M,D,g)$ un fibrado hermitiano con conexión. Dada $\eta > 0$ y τ una sección de E, decimos que τ es (η, D)-transversal a $\mathbf{0}$ (o simplemente η-transversal a $\mathbf{0}$) si en cada punto x donde $|\tau(x)| < \eta$, se tiene $|\nabla_D \tau(x)| > \eta$.*

En la definición anterior podemos pensar en ∇_D como la restricción a D de ∇ o como el correspondiente elemento de $\tilde{D}^*$, pues ambas tienen igual norma. En realidad, esto es cierto para cualquier retracción i de modo que

$q^{\bar{i},i}$ tenga norma acotada por $O(1)$, pues entonces la normas de la restricción y de su imagen por la retracción correspondiente serán comparables.

Se puede dar una definición más geométrica para la que nos es más conveniente pensar en ∇_D como en la restricción a D de ∇: el espacio total E tiene una métrica y una distribución $\hat{D}$ inducida mediante pullback. La distribución tangente a la sección 0 se puede extender mediante transporte paralelo a una distribución $T^{||}$ definida en un entorno tubular de radio η, e intersecarla con $\hat{D}$ definiendo así la distribución $T^{||}_D$. Si denotamos mediante $T\tau$ a la distribución tangente al grafo de τ y llamamos $T_D\tau$ a su intersección con $\hat{D}$, la definición de transversalidad estimada es equivalente a la existencia de un $\eta' > 0$ tal que $\angle_m(T^{||}_D, T_D\tau) > \eta'$ en los puntos en los que $\tau(x)$ entra en el entorno tubular de radio η'. En la definición original la distribución con la que se trabaja es $\mathcal{H}^{\nabla}_D$, la intersección de la distribución horizontal asociada a la conexión ∇ con $\hat{D}$; pero la conexión es lineal y por tanto tangente a la sección $\mathbf{0}$. Así pues, tenemos dos distribuciones $\mathcal{H}^{\nabla}_D$ y $T^{||}_D$ que al coincidir sobre la sección $\mathbf{0}$ estarán tan próximas como queramos en un entorno tubular suficientemente pequeño. Este mismo argumento sirve para probar que la transversalidad estimada para diferentes conexiones es igualmente comparable (y la constante de comparación se sigue de una cota superior para la norma de la forma de conexión que las relaciona).

Esta noción la podemos extender a estratificaciones de Whitney finitas $\mathcal{S} = (S^a)_{a\in A}$ de E. Denotemos, para cada estrato S^a, el transporte paralelo (conexión de Levi-Civita) del fibrado tangente a un determinado entorno tubular mediante $T^{||}S^a$; sea $T^{||}_D S^a$ su intersección con $\hat{D}$. Bastará por ejemplo con que el transporte paralelo sea transversal a la fibras para que $T^{||}_D S^a$ tenga la dimensión esperada (la de S^a menos uno). Para una sección τ de E seguimos denotando mediante $T\tau$ a la distribución tangente a su grafo y mediante $T_D\tau$ a su intersección con $\hat{D}$. Dado un punto $x \in M$, $T_D\tau(x)$ denotará al subespacio vectorial de la distribución $T_D\tau$ en el punto $\tau(x)$. Una vez que quede claro que trabajamos con una sección fija τ, $T^{||}_D S^a(x)$ será el subespacio de la distribución correspondiente en el punto $\tau(x)$.

Definición 5.6. *Sea η un número positivo. La sección τ es (η, D)-transversal a $\mathcal{S}$ (o simplemente η-transversal) si en cada punto x en que τ está a distancia menor que η de un estrato S^a, $T^{||}_D S^a(x)$ tiene la dimensión esperada y $\angle_m(T_D\tau(x), T^{||}_D S^a(x)) > \eta$.*

Una sucesión de secciones es uniformemente transversal a $\mathbf{0}$ (resp. a una sucesión de estratificaciones) si es posible encontrar $\eta > 0$ tal que todas las secciones son, a partir de un cierto K, η-transversales a $\mathbf{0}$ (resp. a las estratificaciones)

La definición anterior sólo tiene sentido fuera de un entorno tubular de la frontera de cada estrato, ya que en los puntos del estrato a distancia menor o igual que un determinado ϵ de la frontera, podemos no tener suficiente control en la geometría del estrato de modo que por ejemplo el entorno tubular en el que definimos $T^{||}S^a$ tienda a cero con ϵ. Por ello es más conveniente quedarse con una región compacta del estrato (los puntos a distancia de la frontera mayor o igual que un cierto ϵ) y definir transversalidad estimada en el complementario *sólo en los puntos del estrato*, es decir, pedimos que si $\tau(x)$ pertenece a uno de esos puntos cercanos a la frontera de S^a, que corte al estrato en ese punto con suficiente ángulo. Veremos que para resolver el problema de transversalidad uniforme en esta última región será suficiente pedir que las estratificaciones sean (uniformemente) de Whitney (la condición (4) en la definición 5.2).

La noción de transversalidad uniforme a una sucesión de estratificaciones aproximadamente holomorfas se puede dar de modo local, siempre que dispongamos de una familia de cartas 1-comparables como las descritas en el apartado anterior.

Antes de esto es necesario abundar un poco más en la noción de ángulo mínimo.

Variaciones del ángulo mínimo y el ángulo máximo. Recordemos que para medir el ángulo mínimo entre subespacios transversales $U, V \subset \mathbb{R}^n$, se hace lo siguiente:

Supongamos en primer lugar que U, V son subespacios complementarios: consideramos V_1, la intersección de la esfera unidad con V. Para cada punto $v \in V_1$ la distancia a U es la distancia a $\pi_U(v)$, la proyección ortogonal de v sobre U. El ángulo correspondiente se puede comparar con la norma de la proyección ortogonal de v sobre $U^\perp$. De ello se sigue que el ángulo mínimo es comparable con la distancia del elipsoide $\pi_{U^\perp}(V_1) \subset U^\perp$ al origen.

Con la interpretación anterior del ángulo mínimo es obvio que si en vez de usar la métrica euclídea en $U^\perp$ se usa una métrica comparable a la euclídea, se obtienen cantidades comparables para el ángulo mínimo. También se puede cambiar la métrica en V a otra comparable y obtener un ángulo comparable. En particular podemos representar V como el grafo de una función lineal $\tau_*\colon U \to U^\perp$. Por definición la cantidad de transversalidad de τ_* a $\mathbf{0}$ es la distancia de $p_{U^\perp}(\mathrm{graf}(\tau_*(U_1)))$ al origen. Nótese que $\mathrm{graf}(\tau_*(U_1))$ es la esfera unidad en V para la métrica inducida por τ_* y la euclídea en U. Esta métrica inducida será comparable a la euclídea mediante una constante γ que se obtiene a partir de una cota superior para la norma de τ_*. Por tanto, bajo esta hipótesis vemos que una cota inferior para el ángulo mínimo es equivalente a una cota inferior para la cantidad de transversalidad de la función τ_*.

Más generalmente podemos cambiar la métrica de todo el espacio a una comparable; se ve claramente que para cualesquiera U, V subespacios complementarios, la restricción a V y $U^\perp$ es comparable a la euclídea en ambos subespacios; el elipsoide unidad contiene una bola euclídea de radio ρ_1 y está contenido en una bola euclídea de radio ρ_2. Esta propiedad se mantiene cuando intersecamos con cualquier subespacio.

Cuando U y V son transversales y tienen intersección no trivial la situación es similar. Si se cambia la métrica a una comparable los ángulos mínimos serán comparables: en primer lugar, llamamos W al ortogonal a $U \cap V$ respecto de la nueva métrica. Imaginemos por el momento que dicho ortogonal coincidiese con el euclídeo. Como acabamos de mencionar, la restricción de la nueva métrica a W será comparable a la euclídea siendo válida la misma constante que compara la nueva métrica y la euclídea en el espacio total. En general W no será el ortogonal euclídeo. Pero se comprueba que la aplicación $\pi_{(U\cap V)^\perp}\colon W \to (U\cap V)^\perp$ envía los subespacios complementarios en W (cuyo ángulo mínimo hemos de medir) a la intersección de U y V con $(U\cap V)^\perp$. Así pues, hemos de medir en $(U\cap V)^\perp$ pero con la métrica inducida por la de W mediante $\pi_{(U\cap V)^\perp}$. Luego nuestro problema se reduce a asegurarnos que $\pi_{(U\cap V)^\perp}$ no distorsiona la métrica euclídea demasiado. Basta encontrar una cota inferior para la aplicación, lo que a su vez equivale a una cota inferior para $\angle_m(W, U\cap V)$. Esto último es consecuencia de la posibilidad de comparar la métrica en el espacio total con la euclídea: en efecto, si tal cota no existiese podríamos encontrar una matriz para el cambio de bases (ortonormales) con determinante arbitrariamente pequeño (y por tanto norma arbitrariamente pequeña). Para ello procedemos por contradicción: tomamos $u \in (U\cap V)^\perp$ de g norma 1 y tal que $u+z\in W$ es un vector con norma muy grande; lo reescalamos a $\lambda(u+v)$ para que tenga g-norma 1, lo que implica que λ será muy pequeño. Se puede completar a una base g-ortonormal de W y a continuación a una base g-ortonormal de todo el espacio añadiendo una base g-ortonormal de $U\cap V$. Podemos escribir la matriz del cambio de base usando una base euclídea ortonormal $\{e_1,\dots,e_n\}$, donde $e_1,\dots,e_s$ generan $U\cap V$ y $e_{s+1},\dots,e_n$ hacen lo propio con $(U\cap V)^\perp$. Atendiendo a esta escisión, la matriz del cambio de base tiene cuatro bloques. El superior izquierdo representa el cambio de base en $U\cap V$, y por hipótesis su determinante está acotado superiormente. Como el bloque superior derecho es nulo sólo nos interesa el inferior derecho. De nuevo por hipótesis las componentes están acotadas superiormente. Teniendo en cuenta que una de las filas está representada por λu (sus componentes en $(U\cap V)^\perp$), el determinante puede hacerse tan pequeño como queramos al ir decreciendo λ.

Es un ejercicio fácil comprobar que cuando el ángulo mínimo se calcula tomando cualquier subespacio complementario a la intersección, la cantidad mayor se obtiene cuando el complementario es el ortogonal.

En determinadas circunstancias la elección de un determinado subespacio complementario W para medir el ángulo mínimo hará los cálculos más fáciles. Pero hemos de asegurarnos que ese complementario tiene ángulo mínimo con la intersección acotado inferiormente, para así obtener una noción de ángulo mínimo comparable.

Un modo de elegir un complementario es como sigue: consideramos $W_1 \subset U\cap V$ y W_1^c un subespacio complementario (en el espacio total); a continuación elegimos $W_2 \subset (U\cap V)\cap W_1^c$ y W_2^c un complementario en W_1^c. Iteramos este proceso. En algún paso, llegaremos a un subespacio W_t de modo que W_t es toda la intersección $(U\cap V)\cap W_{t-1}^c$. Definimos nuestro complementario W como igual a W_t^c. Por la propia construcción W es complementario a $U\cap V$.

Lema 5.7. *Si en la construcción anterior se tienen cotas $\angle_m(W_j, W_j^c) > \delta_j$ (como subespacios complementarios de W_{j-1}^c), entonces existe una constante $\eta(\delta_1, ..., \delta_j) > 0$ de modo que $\angle_m(U \cap V, W) > \eta$.*

PRUEBA. Asumamos en primer lugar que el espacio total es de dimensión 3 y que $t = 2$ y $\dim W_1 = \dim W_2 = \dim W = 1$. Es más fácil trasladar el problema en el correspondiente de geometría esférica: podemos pensar en $(U \cap V) \cap S^2$ como en el ecuador de la esfera S^2. W_1 es entonces un punto en el ecuador (también su antipodal) y W un punto en la esfera; tenemos que mostrar que está suficientemente lejos del ecuador. La hipótesis sobre W_1^c implica que la correspondiente geodésica está suficientemente lejos del punto W_1 en el ecuador. Ello necesariamente implica que corta al ecuador con ángulo acotado inferiormente, pues de lo contrario estaría contenida en un entorno tubular arbitrariamente pequeño del ecuador y por tanto arbitrariamente próxima a W_1. Esta condición en el ángulo, junto con el hecho de que W es un punto en esta geodésica suficientemente lejos (en la métrica de la geodésica) de la intersección con el ecuador –que por definición es W_2– implica que la distancia de W al ecuador está acotada inferiormente.

La prueba cuando las dimensiones de W_1, W_2, W son arbitrarias se puede reducir a la anterior. Si $w \in W$, $u = u_1 + u_2 \in W_1 + W_2 = U \cap V$, el ángulo $\angle(w, u)$ se puede medir en el subespacio $\mathbb{R}^3$ generado por w, u_1, u_2, con la métrica inducida (que es comparable a la euclídea por serlo la métrica del espacio total y con la misma constante γ). Es obvio que las cotas inferiores para $\angle_m(W_1, W_1^c), \angle_m(W_2, W)$ son válidas para $W_1 \cap \mathbb{R}^3 = \langle u_1 \rangle$, $W_1^c \cap \mathbb{R}^3 = \langle u_2 \rangle \oplus \langle w \rangle$, $W_2 \cap \mathbb{R}^3 = \langle u_2 \rangle$ y $W \cap \mathbb{R}^3 = \langle w \rangle$ (pues los ángulos mínimos que se miden son entre subespacios complementarios). Como consecuencia, $\angle(w, u)$ está acotado inferiormente.

Si $t \geq 2$, podemos aplicar inducción. Basta considerar $\tilde{W}_1 = W_1 + W_2$ y $\tilde{W}_1^c = W_2^c$. Por el caso anterior, $\angle_m(\tilde{W}_1, \tilde{W}_1^c)$ está acotado por debajo. Por tanto seguimos con las hipótesis requeridas pero ahora para $t - 1$. □

Este lema tiene como consecuencia el siguiente resultado.

Corolario 5.8. *Sean $U, V, \hat{V}$ subespacios de $\mathbb{R}^n$, con $V \subset \hat{V}$. Si se tiene una cota $\angle_m(U, V) \geq \delta$, entonces existe $\eta(\delta)$ tal que $\angle_m(U, \hat{V}) \geq \eta$.*

PRUEBA. Procedemos a elegir un complementario adecuado. Seleccionamos $W_1 = U \cap V$ y como complementario $W_1^\perp$. Sabemos que para las intersecciones $U^\perp, V^\perp$, que son subespacios complementarios de $W_1^\perp$, se tiene $\angle_m(U^\perp, V^\perp) \geq \delta$. Elegimos $W_2 = \hat{V} \cap U^\perp$ y como complementario, que ya es W, el subespacio generado por $V^\perp$ y el ortogonal a W_2 en $U^\perp$. Si asumimos una cota inferior para $\angle_m(W_2, W)$ podemos usar W como complementario. Por definición $W \cap V = V^\perp$ y $W \cap U \subset U^\perp$. Por tanto se sigue que $\angle_m(W \cap U, W \cap V) \geq \delta$.

Para encontrar la cota inferior para $\angle_m(W_2, W)$ usamos de nuevo el lema anterior. En vez de empezar con W tomamos $V^\perp$, que es un subespacio suyo; como complementario (en $W_1^\perp$) seleccionamos $U^\perp$ y la cota para el ángulo mínimo se sigue por hipótesis. En $U^\perp$ tomamos el ortogonal a $U^\perp \cap \hat{V}$ y como complementario el propio $U^{\perp} \cap \hat{V}$. Teniendo en cuenta el lema anterior, hemos probado una cota para el ángulo mínimo entre $U^{\perp} \cap \hat{V} = W_2$ y el subespacio generado por $V^{\perp}$ y el ortogonal a $U^{\perp} \cap \hat{V}$ que es W. □

Ahora ya podemos dar una caracterización local de la transversalidad uniforme con respecto a una sucesión de estratificaciones como en la definición 5.2.

Lema 5.9. *Sea S^a una sucesión de estratos de una estratificación como en la definición 5.2. Sea $y \in F_k$ un punto en el estrato a distancia mayor que ϵ de la frontera, y sean $f_1, ..., f_p$ las funciones locales correspondientes definiendo al estrato en $B_{\hat{g}_k}(y, \rho_\epsilon)$. Entonces la transversalidad uniforme de τ_k a S^a_k en dicha bola es equivalente (comparable) a la transversalidad estimada a lo largo de las direcciones de D de la función $(f_1 \circ \tau_k, ..., f_p \circ \tau_k)$ a $\mathbf{0}$.*

En consecuencia, si consideramos en los estratos de la sucesión S^a sólo los puntos a distancia mayor o igual que ϵ, la transversalidad uniforme para una sucesión de secciones a dichas regiones se seguirá de una cota inferior común para la cantidad de transversalidad a $\mathbf{0}$ de los correspondientes problemas locales de transversalidad estimada para funciones.

PRUEBA. Por simplicidad omitiremos los subíndices para las secciones τ_k.

La prueba consta de dos partes. La primera supone probar que la transversalidad estimada de la función $f \circ \tau$ a lo largo de D es equivalente a la transversalidad estimada (de $T_D\tau$) con respecto a la distribución $\ker df \cap \hat{D}$. La segunda, que esto es equivalente a transversalidad estimada con respecto a $T^{||}_D S^a_k$. Comenzamos por la primera parte.

Olvidémonos por el momento de D e imaginemos que tratamos probar la transversalidad para todas las direcciones. En vez de tomar el ortogonal a $T\tau \cap \ker df$, tomamos W definido como el subespacio generado por el ortogonal a $T\tau \cap \ker df$ en $\ker df$ y $d\tau(L)$, donde L es el ortogonal (en la base) al núcleo de $d(f \circ \tau)$. Por construcción $\angle_m(W, T\tau \cap \ker df)$ coincide con $\angle_m(d\tau(L), T\tau \cap \ker df)$ medido en $T\tau$, y una cota inferior para este último se sigue de una cota superior para la norma de $d\tau$.

A continuación podemos hacer dos cambios de métrica: el primero supone tomar en $d\tau(L)$ la inducida por τ_* y la euclídea en L (de nuevo la cota superior para $|\tau_*|$ garantiza control en la distorsión de la métrica). El segundo cambio tiene lugar en el ortogonal a $\ker df \cap W$ en W, donde se considera el pullback de la euclídea en $\mathbb{C}^p$ mediante df; este subespacio forma un ángulo mínimo con $\ker df$ acotado inferiormente, lo que implica que controlar el cambio de métrica realizado en el es lo mismo que controlarlo en $\ker df^{\perp}$, o controlarlo en cualquier complementario V a $\ker df$ cuyo ángulo mínimo con $\ker df$ esté acotado inferiormente. Nuestra elección de V será el ortogonal en $T^v F_k$ (el tangente a las fibras) a $\ker df \cap T^v F_k$. Obsérvese que si se cumple $\angle_m(T^v F_k, \ker df) \geq \eta$ entonces aplicando el lema 5.7 obtenemos la cota buscada.

Llamemos U a la intersección de $\ker df$ con el ortogonal a $T^v F_k \cap \ker df$. Queremos probar que U no se aproxima mucho a $T^v F_k$. Escribiendo U como el grafo de una aplicación de $T^vF_k^{\perp}$ al ortogonal en T^vF_k de $T^vF_k \cap \ker df$, buscamos una cota superior para la norma de dicha aplicación. Si tal cota no existiese se podría encontrar un vector u en el ortogonal en T^vF_k de $T^vF_k \cap \ker df$ para el que $df(v)$ es arbitrariamente pequeño. Pero esto contradiría la existencia de una cota inferior para la restricción de $df_1 \wedge ... \wedge df_n$ a la fibra.

Es evidente que tras los citados cambios de complementarios y métricas, lo que estamos computando es exactamente la cantidad de transversalidad de $d(f \circ \tau)$ con respecto a $\mathbf{0}$.

En consecuencia la transversalidad estimada de $d(f \circ \tau)$ con respecto a $\mathbf{0}$ es equivalente a una cota inferior para $\angle_m(T\tau, \ker df)$, y la equivalencia depende de las normas de τ_*, f_* y el ángulo mínimo $\angle_m(\ker df, T^vF_k)$.

Cuando se interseca todo con $\hat{D}$ el argumento previo funciona igualmente. La única diferencia es que sólo usamos la cota de la restricción de τ_* a D. Es importante observar que las elecciones anteriores de nuevos complementarios y los correspondientes cambios de métrica ocurren en $\hat{D}$. En este punto usamos que T^vF_k está contenido en $\hat{D}$ por lo que el complementario V (en la notación del párrafo anterior) de nuevo puede ser elegido en T^vF_k, lo que nos permite aplicar de nuevo la propiedad (1) de 5.2 para concluir la equivalencia.

Si se comprobase que para cualquier $\varepsilon > 0$ $\angle_M(T_D^{||}S^a, \ker df \cap \hat{D}) \leq \varepsilon$ en un entorno tubular del estrato de radio $\varrho(\varepsilon)$, habríamos completado la prueba. Para ello es suficiente probar el mismo enunciado para $\angle_M(T^{||}S^a, \ker df)$ y luego usar que $\angle_m(\hat{D}, \ker df)$ está acotado inferiormente. Éste es el contenido de la proposición 3.7 en [**46**], donde en su notación $V = V' = \hat{D}$, $U = \ker df$, $U' = T^{||}S^a$. En cualquier caso este resultado se puede probar usando las ideas sobre definiciones alternativas del ángulo mínimo. Basta observar que para U y U' de igual dimensión y $\angle_M(U, U')$ suficientemente pequeño, U' es el grafo de una aplicación lineal de U a $U^{\perp}$. El ángulo máximo es comparable a la distancia del elipsoide $p_{U^{\perp}}(U'_1) \subset U^{\perp}$. Se comprueba que intersecar con un subespacio V suficientemente transversal corresponde a trabajar en un determinado subespacio con métrica comparable.

La prueba de que $\angle_M(T^{||}S^a, \ker df) \leq \epsilon$ se sigue de la existencia de cartas 1-comparables para las que f es la proyección en $2p$-coordenadas. Tal y como se mencionó en la apartado 3.2 de esta sección, al ser el estrato un espacio vectorial (de codimensión $2p$) es posible comparar entornos tubulares para la métrica inducida y la euclídea. En el correspondiente g-entorno tubular de un radio apropiado ϱ cada punto q es el extremo de una g-geodésica. Cualquier vector $v \in T_q^{||}S^a$ es el resultado de hacer transporte paralelo de un determinado vector $u \in T_yS^a$. En dicha geodésica, el transporte paralelo está controlado por los símbolos de Chistoffel (también por el vector tangente a la geodésica). Por tanto en el punto de la geodésica para tiempo $t \in [0, r]$, la diferencia entre el transporte paralelo de u para la métrica euclídea y para g está acotada por $e^{t\Gamma} - 1$, donde $\Gamma > 0$ es una constante que depende de las cotas para la conexión inducida. En particular, $|v - u| \leq e^{t\Gamma} - 1$. Por definición u (sobre el punto q) pertenece a $\ker df$. Así pues, $\angle_M(T^{||}S^a, \ker df) \leq e^{r\Gamma} - 1$.

$\square$

Observación 5.10: Es importante resaltar que se puede dar una definición de transversalidad a una sucesión de estratificaciones A.H. a lo largo de una distribución cualquiera $Q \subset TM$ (para variedades casi-complejas de dimensión par principalmente). La generalización es la evidente y en ella el pullback de Q, que denotamos por $\hat{Q}$, juega el papel de $\hat{D}$. Además se ve que la prueba del lema 5.9 funciona para cualquier distribución, de modo que transversalidad estimada a un estrato "lejos" de los puntos de su frontera es equivalente a transversalidad estimada a $\mathbf{0}$ de la función $f \circ \tau$ a lo largo de las direcciones de Q. Esto es especialmente interesante en el caso par (nótese que todas las definiciones y pruebas de esta sección funcionan en el caso par tomando $D = TM$) cuando la distribución Q es integrable, puesto que no sólo podemos estudiar transversalidad en toda la variedad sino hacerlo en hojas aisladas, donde resulta ser equivalente a la transversalidad estimada de la función $f \circ \tau$ restringida a la hoja correspondiente. Generalizando esta situación, podemos considerar en vez de toda una foliación definida en M tan sólo una hoja, es decir, una subvariedad Q de M. Transversalidad estimada de τ al estrato a lo largo de las direcciones de Q (en los puntos de Q) es equivalente a la transversalidad estimada a $\mathbf{0}$ de la función $(f \circ \tau)_{|Q}$.

Para un estrato cuya codimensión $2p$ es menor o igual que la dimensión de Q, es evidente que transversalidad estimada de $f \circ \tau$ a $\mathbf{0}$ a lo largo de Q implica transversalidad estimada de la función a lo largo de todas las direcciones de TM. Cuando la codimensión es menor concluimos que en entornos de g_k-radio uniforme (suponiendo control de orden $O(1)$ para las derivadas de la función) las secciones no tocan el estrato. En cualquier caso, para variedades casi-complejas impares y distribución D, si $2p > \dim D$ también ha de ser $2p > \dim D + 1 = \dim M$. De esto se deduce que no es descabellado el poder lograr transversalidad estimada a lo largo de D a estratos de codimensión mayor que la dimensión de D, que también es por definición transversalidad uniforme al estrato a lo largo de todas las direcciones de TM.

Lema 5.11. *Sea $\mathcal{S} = (S_k^a)_{a \in A}$ una sucesión de estratificaciones aproximadamente holomorfas como en la definición 5.2. Asumamos que la sucesión τ_k es uniformemente transversal a $\mathcal{S}$ a lo largo de las direcciones de una distribución Q cuya dimensión es mayor o igual que la codimensión de los estratos, y que la cota uniforme $|\nabla \tau_k|_{g_k} \leq O(1)$ se cumple. Entonces para cada $a \in A$, $\tau_k^{-1}(S_k^a)$ es una subvariedad uniformemente transversal a Q.*

PRUEBA. Omitimos los subíndice para secciones y estratificaciones. La prueba del resultado es especialmente fácil para aquellos puntos de M que τ envía lejos de la frontera de S_k^a. Es suficiente encontrar un subespacio $Q^c \subset \ker d(f \circ \tau)$ complementario a Q cuyo ángulo mínimo con Q esté acotado inferiormente (siempre existe al haber asumido $\dim Q \geq 2p$). Para ello tomamos una base $u_1, ..., u_{n-q}$ de $Q^\perp$. Existe un único v_i en el ortogonal a $\ker d(f \circ \tau) \cap Q$ en Q tal que $u_i + v_i \in \ker d(f \circ \tau)$. Los argumentos usados en relación con la medida del ángulo mínimo demuestran que la cota buscada es equivalente a una cota superior en la norma de v_i, lo que se desprende de la hipótesis en la norma de $\nabla \tau$ (la norma de df está acotada y el ángulo mínimo entre la distribución asociada a ∇ y la fibra está acotado inferiormente) y de la cota inferior en la norma de la imagen de v_i (consecuencia de la cota inferior para el ángulo mínimo a lo largo de las direcciones de Q).

Simplemente mencionamos que este argumento se puede modificar y en vez de trabajar con la función f trabajar con los estratos en el espacio total de F_k. Por tanto también es cierto para aquellos puntos cercanos a la frontera del estrato.

$\square$

En particular se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 5.12. *Sea $S = (S_k^a)_{a\in A}$ una sucesión de estratificaciones aproximadamente holomorfas como en el definición 5.2 sobre la variedad casi-compleja impar (M, D, J, g). Asumamos que la sucesión A.H. τ_k es uniformemente transversal a S a lo largo de las direcciones de D y que la cota uniforme $|\nabla\tau_k|_{g_k} \leq O(1)$ se cumple. Entonces para cada $a \in A$, $\tau_k^{-1}(S_k^a)$ es o bien vacía si la codimensión de S_k^a es mayor que la dimensión de D (o de M), o bien una subvariedad uniformemente transversal a D.*

En el caso de una variedad de dimensión par y de transversalidad uniforme a lo largo de las direcciones de una subvariedad (compacta) Q (asumiendo la citada cota para $|\nabla\tau_k|_{g_k}$), entonces o bien $\tau_k^{-1}(S_k^a)$ se encuentra a g_k-distancia de Q acotada inferiormente o bien es una subvariedad (definida al menos en un g_k entorno de Q) uniformemente transversal a Q.

Quisiéramos cerrar esta sección dando un criterio suficiente para comprobar la holomorfía aproximada de una sucesión de estratificaciones (finitas y de Whitney).

Para ello introducimos las siguientes definiciones:

Usando trivializaciones A.H. de E_k, cada fibrado se identifica localmente con $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}) \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ mediante las bases escogidas.

Definición 5.13. *Decimos que una subvariedad del espacio total $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}) \times \mathbb{C}^m$ es constante si no varía en cada fibra. La variedad (constante) es además holomorfa si su intersección con una fibra es una variedad holomorfa de $\mathbb{C}^m$. Decimos que la subvariedad es invariante por la acción de $Gl(n, \mathbb{C}) \times Gl(m, \mathbb{C})$ cuando su intersección con cada fibra lo es.*

Hablamos de una estratificación constante de E_k cuando tenemos identificaciones locales para cada punto de modo que los correspondientes estratos son constantes y son el mismo independientemente de k y x para $k >> 0$ (es decir, corresponden al mismo modelo local). Igualmente decimos que la estratificación es además holomorfa si lo es para una familia de identificaciones locales. La invariancia mediante la acción de $Gl(n, \mathbb{C}) \times Gl(m, \mathbb{C})$ se refiere igualmente a invariancia de la intersección de la estratificación con cada fibra.

Lema 5.14. *Sea $(S_k^a)_{a\in A}$ una estratificación de Whitney finita de E_k por subvariedades constantes y holomorfas, e invariante por la acción de $Gl(n, \mathbb{C}) \times$*

$Gl(m,\mathbb{C})$ ó $Gl(n,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$. En tal caso la sucesión $(S_k^a)_{a\in A_k}$ es de estratificaciones A.H. finitas y de Whitney.

Recíprocamente, a partir de una estratificación de $(\mathbb{C}^n\times\mathbb{R})\times\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n\times\mathbb{R}$ con las propiedades anteriores, usando las identificaciones locales se puede inducir una sucesión en E_k de estratificaciones A.H. finitas de Whitney.

PRUEBA. Usando la identificación local, las condiciones (1), (2), (3) y (4) de la definición 5.2 se verifican de modo trivial. Tal vez debiéramos notar que los estratos (en la fibra sobre el origen por ejemplo) son subvariedades de $\mathbb{C}^m$ y la cotas que se obtienen (por ejemplo para la condición de Whitney) pueden no ser independientes de los puntos. Pero sólo estamos interesados en regiones compactas, en las que las cotas son uniformes.

En el caso de variedades casi-complejas pares los comentarios anteriores prueban el lema. En la situación impar observamos que el espacio total tiene estructura de variedad casi compleja con una escisión dada por la métrica. Es decir, el ortogonal a $\hat{D}$ viene definido por $D^\perp$ y la conexión sobre este fibrado de línea. Esto significa que al usar secciones A.H. holomorfas para trivializar obtenemos coordenadas $z_k^1, ..., z_k^n, u_k^1, ..., u_k^m, s_k$ en las que los estratos vienen definidas por funciones A.H. (normalmente independientes de $z_k^1, ..., z_k^n, s_k$) *con respecto a estas coordenadas.* De nuevo puede muy bien ocurrir que estas coordenadas no sean estrictamente holomorfas para el espacio total, pues la correspondiente dirección vertical puede no coincidir aproximadamente con el ortogonal a $\hat{D}$ (por la presencia de la conexión). En cualquier caso, el control en la conexión y sus derivadas implica que tenemos coordenadas A.H. en el sentido débil, lo cual nos asegura que si f es A.H. en las citadas coordenadas, lo es también para la estructura de variedad casi compleja del espacio total (aunque las cotas que se obtengan dependerán también de las que controlan la distorsión de la conexión y sus derivadas). □

5.3. Cuasi-estratificaciónes de $\mathcal{J}_D^r E_k$

La aplicación principal que perseguimos de esta teoría es para una estratificación generalizada (*cuasi-estratificación*) de $\mathcal{J}_D^r E_k$, donde E_k es $\mathbb{C}^{m+1} \otimes L_k$, siendo L_k en el caso de variedades calibradas la sucesión muy amplia de potencias del fibrado precuantizable. Mediante esta cuasi-estratificación pretendemos estudiar las propiedades de genericidad de la proyectivización de una sección de E_k en aquellos puntos donde no se anula.

A diferencia de lo que ocurre para 0-jets, para jets de orden superior no resulta fácil encontrar sucesiones de estratificaciones A.H. Incluso algunas que se pueden definir de modo natural resultan no ser adecuadas para nuestros propósitos. La dificultad proviene de que aunque la modificación de la conexión hace que los r-jets de secciones A.H. de E_k sean secciones A.H. de $\mathcal{J}_D^r E_k$, al componer con las funciones que definen los estratos no hay modo de garantizar que el resultado sea A.H. Una condición suficiente sería que las funciones f que definen localmente los estratos fuesen aproximadamente holomorfas en el espacio total, y éste es precisamente el punto delicado una vez la conexión ha sido modificada.

EJEMPLO 5.15: Sea $L^{\otimes k}$ la sucesión de potencias del fibrado precuantizable de una *variedad simpléctica.* Consideremos en $\mathcal{J}^1 L^{\otimes k}$ la siguiente sucesión de estratos:

$$\Sigma_{k,n} = \{(\sigma_0, \sigma_1) | \sigma_1 = 0\}$$

Usando la base $\mu_{k,x,I}$, donde $I = 1, ..., n$, y tomando secciones de referencia en cartas de Darboux, tenemos coordenadas $z_k^1, ..., z_k^n, v_k^0, v_k^1, ..., v_k^n$ para el espacio total. Entonces $\Sigma_{k,n}$ viene definido por los ceros de la función $f = (v_k^1, ..., v_k^n)\colon \mathbb{C}^{2n+1} \to \mathbb{C}^n$, que no es holomorfa (o A.H.) con respecto a la estructura casi-holomorfa modificada del espacio total. Si así fuese, en particular $f \circ j^1(z_k^1 \tau_{k,x}^{\mathrm{ref}})$ sería A.H., pero dicha composición es de modo aproximado $(1 + z_k^1 \bar{z}_k^1, z_k^1 \bar{z}_k^2, ..., z_k^1 \bar{z}_k^n)$. En realidad no sólo se demuestra que f no es holomorfa (o A.H.) sino que ninguna otra función local definiendo el estrato puede serlo. En efecto, si así fuese su composición con el citado 1-jet sería el resultado de componener $f \circ j^1(z_k^1 \tau_{k,x}^{\mathrm{ref}})$ por la derecha con un difeomorfismo de $\mathbb{C}^n$. Dicha composición jamás será holomorfa porque por ejemplo la imagen de $f \circ j^1(z_k^1 \tau_{k,x}^{\mathrm{ref}})$ está en $\mathbb{R}^n$ (también se ve que tampoco puede ser A.H.).

Para nuestra principal aplicación es necesario debilitar la noción de estratificación:

Definición 5.16. *(ver [5]) Sea S una subvariedad de $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m}$. Se define Θ_S como el conjunto de puntos σ de S para los que es posible encontrar un $(r+1)$-jet cuyo r-jet (truncándolo) es σ, y que visto como 1-jet (a lo largo de D_h o foliado) de una sección local de $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m}$, corta a S en σ transversalmente a lo largo de D_h (o equivalentemente su restricción a D_h cota a S transversalmente).*

Nos referiremos a Θ_S como el subconjunto holónomo transversal de S.

Tal vez conviene mencionar que cuando representamos un $(r+1)$-jet como una sección local de $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m}$, a efectos de determinar su pertenencia o no a un subconjunto Θ_S dicha representación es esencialmente única. Esto es así pues de la correspondiente función (en la base μ_I) para tratar transversalidad sólo nos interesa su desarrollo en las coordenadas $z_k^1, \bar{z}_k^1, ..., z_k^n, \bar{z}_k^n$ hasta grado 1. La parte de grado cero queda determinada por el r-jet, las hipótesis implican que no hay parte antiholomorfa de grado uno ($d = \partial$ en el origen) y la parte holomorfa queda totalmente determinada por el $(r+1)$-jet. Esto quiere decir en particular que podemos restringir nuestra atención a representaciones locales holomorfas si es necesario.

Si usamos la trivialización dada por la base μ_I, se extienden de modo natural algunas de las nociones introducidas al final de la sección anterior. Una subvariedad de $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m}$ se llama constante si en la trivialización anterior no depende de las coordenadas de la base.

Una estratificación de $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m}$ es *constante* si todos sus estratos son subvariedades constantes. En una estratificación constante cada estrato queda descrito por su intersección con la fibra sobre el origen. Es obvio que para toda subvariedad constante S su subconjunto Θ_S es también constante. También se comprueba que si S es invariante por la acción de $Gl(n,\mathbb{C}) \times Gl(m,\mathbb{C})$ (en cada fibra), entonces Θ_S tiene la misma propiedad de invariancia.

La definición 5.16 puede ser trasladada a los fibrados $\mathcal{J}^r_D E_k$ usando representaciones locales para ∇_H. El problema que se plantea es que por el hecho haber modificado la conexión si nuestro estrato S_k viene dado por condiciones que involucran componentes que no son de orden cero, una vez que identificamos $\mathcal{J}^r_D E_k$ con $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m}$, Θ_{S_k} no se identifica con Θ_S porque no podemos comparar en general las representaciones locales para d_{D_h} y $\nabla_{H,D}$. En cualquier caso hay ejemplos en los que esto se cumple de modo aproximado.

En cualquier caso es conveniente usar representaciones locales A.H. para los $(r+1)$-jets.

Definición 5.17. *Sea σ_k un $(r+1)$-jet pseudo-holomorfo sobre un punto x. Una sección α_k de $\mathcal{J}^r_D E_k$ es una (C^D, C)-representación c-local de σ_k si α_k es una sección local C^1-A.H.(C^D, C) definida en $B_{g_k}(x,c)$ (donde las citadas cotas son válidas), y verifica:*

(1) $\alpha_k(0) = \pi^{r+1}_r \sigma_k$
(2) $\nabla_{H,D}\alpha_k(0) = \sigma_k$,

donde $\nabla_{H,D}$ es la componente de ∇_H a lo largo de D (usando como siempre la escisión asociada a la métrica).

El siguiente paso es demostrar que para los $(r+1)$-jets existen (C^D, C)-representaciones (globales) para ciertas constantes que no dependen ni de k ni de x (aunque dependan de la norma del $(r+1)$-jet). Este hecho es consecuencia de ciertas características de la conexión modificada ∇_H.

Lema 5.18. *Sea E_k una sucesión muy amplia de fibrados (localmente escindibles) sobre M y $(\mathcal{J}^{r+1}_D E_k, \nabla_H)$ la sucesión de fibrados de $(r+1)$-jets pseudo-holomorfos con la conexión modificada. Para cualquier $(r+1)$-jet σ_k sobre cualquier punto $x \in M$, existe un número natural K y constantes positivas C^D, C que dependen en la norma de σ_k y en la geometría de M, pero no en k y x, tal que existe una representación (C^D, C)-A.H (global) α_k de σ_k.*

PRUEBA. Fijemos coordenadas aproximadamente holomorfas adaptadas a la métrica en las que J coincide en el origen con J_0. Usando la identificación local inducida por estas cartas junto con una elección de base local (por ejemplo dada por secciones de referencia $\tau^{\text{ref}}_{k,x,j}$), trasladamos la conexión ∇_H a $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m}$ y la seguimos denotando ∇_H. Puesto que las representaciones locales son herramientas para tratar con los puntos de un estrato donde una sección A.H. necesariamente corta con poca transversalidad, asumiremos por el momento la existencia de una sucesión $\mathcal{S}_k$ de estratificaciones A.H. de $\mathcal{J}_D^r E_k$, que en las identificaciones locales anteriores coinciden con una estratificación $\mathcal{S}$ de $\mathcal{J}_{D_h,n,m}^r$ invariante por la acción de $Gl(n,\mathbb{C}) \times Gl(m,\mathbb{C})$. Para cada estrato S_k^a sería razonable definir $\Theta_{S_k^a}$ como el subconjunto de S_k^a de los r-jets σ para los que existe un $(r+1)$-jet extendiendo a σ, con una representación local (no necesariamente A.H.) transversal a S_k^a (a lo largo de D). Sería deseable que usando la identificación local con $\mathcal{J}_{D_h,n,m}^r$, $\Theta_{S_k^a}$ se identificase a su vez con Θ_{S^a}, pero esto de nuevo *no es cierto en general*. Para que esto ocurriese sería suficiente relacionar las representaciones locales (en la carta) con respecto a d_{D_h} y $\nabla_{H,D}$, o para ser más precisos, el valor de la componente en $\bar{D}^*$ de la forma de conexión en el punto en cuestión (digamos, el origen). Puesto que se ha asumido que $\mathcal{S}$ es invariante por la acción de $Gl(n,\mathbb{C}) \times Gl(m,\mathbb{C})$, podemos usar dicha acción para modificar la forma de conexión de $\nabla_{H,D}$ (mientras mantenemos d y $\mathcal{S}$). Si fuésemos capaces de lograr con esta acción la anulación de la forma de conexión la propiedad buscada se cumpliría.

Veamos lo que ocurre en los modelos. Para el caso Kähler (dimensión par) sería suficiente trivializar E_k con secciones holomorfas de modo que la forma de conexión se anule en el origen; a continuación tomaríamos coordenadas normales (tenemos una métrica Kähler), con lo que la conexión no modificada se anularía en el origen. Ocurre sin embargo que para la conexión modificada siempre tendremos la parte antiholomorfa. Por tanto parece razonable usar una trivialización holónoma (por jets de secciones holomorfas), en la que la parte antiholomorfa es nula.

En el caso no integrable (impar) es posible también lograr que la conexión no modificada (a lo largo de D) se anule. Lo hace de modo aproximado mediante la elección de trivializaciones A.H. adecuadas que anulan la forma de conexión proveniente de E_k. Como la métrica tiene peso $O(c_k^{-1/2})$ una pequeña modificación en la elección de $dz_k^i \in \bar{D}^{*1,0}$ del tamaño anterior hace el resto. Nótese que a diferencia del caso integrable esta pequeña modificación no proviene necesariamente de la elección de nuevas coordenadas A.H., pero en cualquier caso sólo usamos la acción de $Gl(n,\mathbb{C})$.

Para la conexión modificada no parece posible lograr el citado objetivo empezando con la base μ_I (que es homogénea en el sentido que cada sección sólo tiene componentes no nulas de un determinado grado) y usando tan sólo la acción de $Gl(n,\mathbb{C}) \times Gl(m,\mathbb{C})$; dicha acción preserva los subfibrados homogéneos de $\mathcal{J}_D^r E_k$, mientras que la conexión no preserva secciones de los mismos. En particular para $\mathcal{J}_D^1 L_k$ y cualquier sección τ con $\tau(0) \neq 0$, $\nabla_{H_1}(\tau, 0) = (\nabla\tau, -F_D^{1,1}\tau)$, con $-F_D^{1,1}\tau(0) \neq 0$ (de algún modo esto refleja lo que ocurre en el ejemplo 5.15).

Es más o menos evidente lo que tenemos que hacer para lograr representaciones locales. Partimos de la base $\nu_{k,x,I}$ de $\mathcal{J}_D^{r+1}E_k$. Sobre el origen, cualquier $(r+1)$-jet σ es una combinación lineal $\sum_I \beta_I \nu_{k,x,I}$. Por la linealidad de los jets $\sigma = j_D^{r+1}(\beta_I \tau_{k,x,I}^{\mathrm{ref}})$, y por tanto $\pi_r^{r+1}\sigma = j^r(\beta_I \tau_{k,x,I}^{\mathrm{ref}})(0)$. Como la anterior es una sección A.H., $\sigma - \nabla_{H,D} j^r(\beta_I \tau_{k,x,I}^{\mathrm{ref}})(0)$ tiene tamaño $O(c_k^{-1/2})$. Basta por tanto hacer una pequeña perturbación lineal (tamaño

$O(c_k^{-1/2})$) en las coordenadas $x_k^1, y_k^1, ..., x_k^n, y_k^n$ para obtener la representación local requerida, cuyas cotas vienen dadas en función de las de las $\tau_{k,x,j}^{\mathrm{ref}}$ y de la norma del $(r+1)$-jet en cuestión. Como es lógico todas las cotas obtenidas no dependen ni de k ni de x. $\square$

Definición 5.19. *Sea S_k una subvariedad de $\mathcal{J}_D^r E_k$ transversal a las fibras, y sean $C^D, C, c > 0$. Se define $\Theta_{S_k(C^D,C,c)} \subset S_k$ como el conjunto de puntos σ_k de S_k para los que existe una representación (C^D, C)-A.H. c-local α_k de un levantamiento de σ_k cortando a S_k (en σ_k) transversalmente a lo largo de las direcciones de D.*

En determinadas situaciones nos olvidaremos de las constantes y hablaremos de Θ_{S_k} como los puntos para los que existen levantamientos con representaciones transversales. Esto sólo ocurrirá cuando usando identificaciones locales dichos subconjuntos coincidan con los Θ_S correspondientes.

Observación 5.20: Aunque la definición anterior se ha dado para un sólo fibrado, cobra realmente sentido para una sucesión de los mismos. El motivo es que para una sucesión de secciones C^{r+1}-A.H.(C^D, C) de E_k, si la sucesión de r-jets es uniformemente transversal a una sucesión S_k de subvariedades de $\mathcal{J}_D^r E_k$ (para k mayor que un cierto K), necesariamente lo hará en los puntos de $\Theta_{S_k^a(\tilde{C}^D,\tilde{C},c)}$, donde las constantes $\tilde{C}^D, \tilde{C}$ sólo dependen de C^D,C y de la geometría de E_k y M –pero no de k– (y c es un número positivo menor que el radio de inyectividad).

Observación 5.21: Si un $(r+1)$-jet $\tilde{\sigma}_k$ es la derivada a lo largo de D de una cierta sección C^{r+1}-A.H.(C^D, C) local, entonces $||\sigma_k|| \leq C^D + O(c_k^{-1/2})$.

Recordamos el siguiente ejemplo ya citado por D. Auroux [**5**]:

EJEMPLO 5.22: Denotemos mediante Z_k el conjunto de r-jets correspondientes a secciones que cortan la sección $\mathbf{0}$ de E_k.

$$Z_k = \{\sigma = (\sigma_0, ..., \sigma_r) \,|\sigma_0 = 0\}$$

Si miramos Z_k como una subvariedad Z de $\mathcal{J}_{D_h,n,m}^r$ y trabajamos en el marco integrable (en el que no hay necesidad de usar constantes que acotan la falta de holomorfía), se comprueba fácilmente que Θ_Z consta de aquellos jets para los que σ_1 es sobreyectiva (y por tanto será vacío si $m > n$). Si ahora pensamos Z como una sucesión Z_k de subvariedades de $\mathcal{J}_D^r E_k$, los subconjuntos $\Theta_{Z_k(C^D,C,c)}$ serán de nuevo vacíos si la dimensión compleja de la fibra de E_k es mayor que n. En caso contrario constarán de aquellos r-jets σ para los que disponiéndose de representaciones c-locales con las cotas apropiadas para el $(r+1)$-jet $(\sigma, 0)$, σ_1 es sobre (la conexión en E_k es lineal y por tanto tangente a la sección $\mathbf{0}$).

Obsérvese que éste es un ejemplo muy peculiar pues el estrato viene definido sólo por condiciones involucrando la parte de grado 0. Esto quiere decir que la modificación de la conexión le no afecta para nada, por lo que en identificaciones locales en las que Z_k va a Z, también Θ_{Z_k} (definido sin imponer restricciones a las representaciones locales) va exactamente a Θ_Z.

Siendo nuestro objetivo final perturbar sucesiones de secciones aproximadamente holomorfas τ_k de modo que sus r-jets sean transversales a determinadas estratificaciones (cuasi-estratificaciones), y teniendo en cuenta que dichas perturbaciones han de ser arbitrariamente pequeñas en las direcciones de D (digamos en C^h-norma, i.e., controlando las h primeras derivadas covariantes a lo largo de D de la diferencia), el conjunto de r-jets con los que trabajaremos estará siempre uniformemente acotado; y lo mismo ocurrirá con aquellos $(r+1)$-jets que pueden definir $(h \geq 1)$. Por tanto trabajaremos con sucesiones de estratos en regiones uniformemente acotadas. Esto querrá decir que si nos fijamos en los subconjuntos $\Theta_{S_k(C^D,C,c)}$, donde las constantes (C^D, C) se eligen mayores que las que controlan hasta orden 1 la holomorfía aproximada de $j^r_D\tau_k$ (y de modo que existan representaciones c-locales de un conjunto uniformemente acotado de $(r+1)$-jets conteniendo a $j^{r+1}_D\tau_k$ y sus perturbaciones próximas), la falta de transversalidad con respecto a S_k de r-jets de sucesiones A.H. suficientemente próximos a $j^r_D\tau_k$ (para que las cotas (C^D, C) sean también válidas para ellas hasta orden 1), se puede formular en términos de su pertenencia (aproximada) al complementario de $\Theta_{S_k(C^D,C,c)}$ en S_k.

Definición 5.23. *(véase también [5]) Sea $(A, \prec)$ un conjunto con una relación binaria sin ciclos ($a_1 \prec \cdots \prec a_p \Rightarrow a_p \not\prec a_1$). Una cuasi-estratificación de Whitney de $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m}$ finita indexada por A es una familia finita de subvariedades diferenciables $(S^a)_{a\in A}$ no necesariamente disjuntas tal que:*

(1) $\partial S^a \subseteq \bigcup_{b\prec a} S^b$,
(2) *para cualquier punto en la frontera $q \in \partial S^a$ ha de existir $b \prec a$ tal que o bien $q \notin \Theta_{S^b}$ o bien $S^b \subset \partial S^a$ y se cumple la condición de Whitney para $S^b \subset \partial S^a$ (o al menos q pertenece a aquellos puntos lejanos a la frontera donde dicha condición se cumple).*

La cuasi-estratificación se dirá constante (resp. holomorfa) si sus estratos tienen esta propiedad.

Para los fibrados $\mathcal{J}^r_D E_k$ se puede dar una noción similar a la anterior de sucesión de cuasi-estratificaciones de Whitney finitas aproximadamente holomorfas: la familia de subvariedades no necesariamente disjuntas $(S^a_k)_{a\in A_k}$ tiene que ser transversal a las fibras, con ecuaciones locales como en la definición 5.2 para puntos en los estratos con radio (uniformemente) proporcional a la distancia a la frontera y satisfaciendo las condiciones (1), (2) y (3) de aquella definición. La diferencia ocurre en los puntos de la frontera: allí tenemos $\partial S^a_k \subseteq \bigcup_{b\prec a} S^b_k$, y existe un numero natural K tal que para todo $k \geq K$, en cualquier punto de la frontera $q \in \partial S^a_k$ tiene que existir $b \prec a$ tal que $q \in S^b_k$ y se da una de la siguientes situaciones:

i $S^b_k \subset \partial S^a_k$ y la condición de Whitney uniforme (la cuarta en la definición 5.2) se cumple en todos los puntos de S^b_k, o al menos en los lejanos a su frontera a los que q pertenece (y no necesariamente en todos los estratos de índices precedentes).

ii *q aproximadamente no pertenece a* $\Theta_{S_k^b}$; esto es, para cada terna de constantes positivas (C^D, C, c) existe otra constante positiva $\check{C}$ que depende de ellas pero no de k, tal que para cualquier $(r+1)$-jet σ con $\pi_r^{r+1}\sigma = q$, cualquier (C^D, C)-representación local α de σ corta a S_k^b (en q) con ángulo mínimo a lo sumo $\check{C}c_k^{-1/2}$.

Es obvio que para variedades casi-complejas pares, y para $\mathcal{S}_k$ una estratificación A.H. de Whitney finita, podemos definir igualmente los subconjuntos $\Theta_{S_k^a(C,c)}$, y dar la correspondiente definición de cuasi-estratificación.

5.4. La cuasi-estratificación de Thom-Boardman-Auroux para aplicaciones a espacios proyectivos

Intentamos estudiar la genericidad para las aplicaciones a espacios proyectivos $\mathbb{CP}^m$ asociadas a sucesiones A.H. de secciones de $E_k = \mathbb{C}^{m+1} \otimes L_k$. Para ello introducimos el fibrado no lineal de r-jets pseudo-holomorfos en $\mathbb{CP}^m$ y analizamos sus propiedades principales en las dos proposiciones que siguen. Antes recordamos que Z_k denota la sucesión de estratos de $\mathcal{J}_D^r E_k$ –ya introducida en el ejemplo 5.22– de r-jets cuya parte de grado cero se anula. También definimos $\mathcal{J}_D^r E_k^* := \mathcal{J}_D^r E_k - Z_k$, y en el caso de variedades casi-complejas de dimesión par definimos también $\mathcal{J}^r E_k^* := \mathcal{J}^r E_k - Z_k$, y $\mathcal{J}_G^r E_k^* := \mathcal{J}_G^r E_k - Z_k^G$ en presencia de una polarización G, donde de nuevo Z_k denota el conjunto de r-jets del fibrado $\mathcal{J}^r E_k$ cuya componente de grado 0 se anula y $Z_k^G = Z_k \cap \mathcal{J}_G^r E_k$.

Definición-Proposición 5.24. *Se puede definir un fibrado no lineal $\mathcal{J}_D^r(M, \mathbb{CP}^m)$ de r-jets pseudo-holomorfos a lo largo de D, y para una función $\phi\colon (M, D, J, g) \to \mathbb{CP}^m$ una noción de r-jet $j_D^r\phi \in \Gamma(\mathcal{J}_D^r(M, \mathbb{CP}^m))$ con las siguientes propiedades:*

(1) *Existe una aplicación de fibrados $j^r\pi\colon \mathcal{J}_D^r E_k^* \to \mathcal{J}_D^r(M, \mathbb{CP}^m)$ que es una submersión. Para cada sección τ_k de E_k, en los puntos donde no se anula hay definida una proyectivización ϕ_k y se tiene que*
$$j^r\pi(j_D^r\tau_k) = j_D^r\phi_k. \tag{5.5}$$

(2) *Las fibras de $\mathcal{J}_D^r(M, \mathbb{CP}^m)$ admiten una estructura casi-compleja integrable de modo la aplicación $j^r\pi$ es holomorfa a lo largo de las fibras, y además para cada sucesión τ_k A.H. de E_k, $j^r\pi(j_D^r\tau_k) \in \Gamma(\mathcal{J}_D^r(M - \tau_k^{-1}(0), \mathbb{CP}^m))$ es una sucesión de secciones A.H.*

Para variedades casi-complejas de dimensión par se define de modo análogo el fibrado $\mathcal{J}^r(M, \mathbb{CP}^m)$ con estructura casi-compleja canónica integrable en las fibras. Se tiene igualmente una submersion $j^r\pi\colon \mathcal{J}^r E_k^* \to \mathcal{J}^r(M, \mathbb{CP}^m)$ holomorfa a lo largo de las fibras. Dada $\phi\colon M \to \mathbb{CP}^m$, se tiene la correspondiente definición de r-jet pseudoholomorfo $j^r\phi$ y se verifica:
$$j^r\pi(j^r\tau_k) = j^r(\pi \circ \tau_k), \tag{5.6}$$

Para cada sucesión τ_k A.H. de E_k, $j^r\pi(j^r\tau_k) \in \Gamma(\mathcal{J}^r(M - \tau_k^{-1}(0), \mathbb{CP}^m))$ es una sucesión de secciones A.H.

Si tenemos una polarización G podemos definir $\mathcal{J}^r_G(M, \mathbb{CP}^m) \overset{i^r_G}{\hookrightarrow} \mathcal{J}^r(M, \mathbb{CP}^m)$ de modo que tenemos el siguiente cuadrado conmutativo de submersiones:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{J}^r E_k^* \arrow[r, "p^r_G"] \arrow[d, "j^r\pi"] & \mathcal{J}^r_G E_k^* \arrow[d, "j^r\pi"] \\ \mathcal{J}^r(M, \mathbb{CP}^m) \arrow[r, "p^r_G"] & \mathcal{J}^r_G(M, \mathbb{CP}^m) \end{tikzcd}$$

Las aplicaciones p^r_G son las inducidas por la proyección ortogonal de T^*M en $\bar{G}^*$ y si $j^r_G\tau_k$ es una sección de $\mathcal{J}^r_G E_k^*$, la restricción de $j^r\pi$ satisface:

$$j^r\pi(j^r_G\tau_k) = j^r_G(\pi \circ \tau_k). \tag{5.7}$$

Si τ_k es una sucesión A.H., $j^r_G\phi_k$ es también una sucesión A.H. de $\mathcal{J}^r(M - \tau_k^{-1}(0), \mathbb{CP}^m)$ contenida en $\mathcal{J}^r_G(M - \tau_k^{-1}(0), \mathbb{CP}^m)$.

PRUEBA-DEFINICIÓN. Definimos el fibrado no lineal $\mathcal{J}^r_D(M, \mathbb{CP}^m)$ del siguiente modo. Tomamos un sistema de cartas para $\mathbb{CP}^m$. Por ejemplo, en $\mathbb{C}^{m+1}$ con coordenadas $z_0, ..., z_m$ consideramos la proyección canónica $\pi\colon \mathbb{C}^{m+1} - \{0\} \to \mathbb{CP}^m$, y tomamos las cartas $\varphi_i^{-1}\colon U_i \to \mathbb{C}^m$ enviando $[z_0, ..., z_m]$ a $(\frac{z^1}{z^0}, ..., \frac{z^m}{z^0})$; denotamos por Ψ_{ji} al cambio de coordenadas $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$. Para cada carta φ_i se considera el fibrado

$$\mathcal{J}^r_D(M, \mathbb{C}^m)_i := (\sum_{j=0}^{r} (\bar{D}^{*1,0})^{\odot j}) \otimes \mathbb{C}^m.$$

Sobre cada punto x, en la intersección $U_i \cap U_j$ identificamos la fibra sobre x de $\mathcal{J}^r_D(M, \mathbb{C}^m)_i$ con la de $\mathcal{J}^r_D(M, \mathbb{C}^m)_j$ usando la misma transformación $j^r\Psi_{ji}$ que la aplicación holomorfa Ψ_{ji} asociada al cambio de carta induce en $\mathcal{J}^r_{n,m}$. Dicho de otro modo, si tomamos coordenadas locales conteniendo a x e identificamos localmente $\bar{D}^{*1,0}$ con $T^{*1,0}\mathbb{C}^n$, $\mathcal{J}^r_D(M, \mathbb{C}^m)_i$ se identifica con $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m}$. Por tanto un r-jet σ viene representado por el r-jet de una función holomorfa $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$. La identificación en cuestión supone igualar σ con el r-jet asociado a $\Psi_{ji} \circ F$ como elemento de $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m} \cong \mathcal{J}^r_D(M, \mathbb{C}^m)_j$. Esta aplicación no depende de la identificación local con $T^{*1,0}\mathbb{C}^n$ (de nuevo podemos componer por la derecha F con la correspondiente aplicación lineal), por lo que de estar en principio definida localmente pasa a estarlo globalmente. Estas aplicaciones definen una relación de equivalencia, es decir, la condición de dar lugar a un cociclo se verifica pues así ocurre para jets integrables, por lo que tenemos un fibrado (localmente trivial) bien definido.

Sea $\phi\colon (M, J, D) \to \mathbb{CP}^m$. Su r-jet $j^r_D\phi$ se define como sigue: las cartas del proyectivo dan lugar a aplicaciones $\phi_i := \varphi_i^{-1} \circ \phi\colon M \to \mathbb{C}^m$. Usando la conexión trivial d en este fibrado trivial, tenemos (para cada k) una conexión inducida ∇ (la parte en $\bar{D}^{*1,0}$ es no trivial) con la que podemos definir el correspondiente r-jet $j^r_D\phi_i$ (simetrizado). Es necesario comprobar que $j^r_D\phi_j = j^r\Psi_{ji}(j^r_D\phi_i)$. Más generalmente, en vez de usar un difeomorfismo $\Psi_{ji}\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ podemos usar una aplicación holomorfa cualquiera $H\colon \mathbb{C}^{m_1} \to \mathbb{C}^{m_2}$ para construir una aplicación $j^rH\colon \mathcal{J}^r_D(M,\mathbb{C}^{m_1}) \to \mathcal{J}^r_D(M,\mathbb{C}^{m_2})$, de modo que para una función $\phi\colon M \to \mathbb{C}^{m_1}$ se tiene $j^r_D(H\circ\phi) = j^rH(j^r_D\phi)$.

La prueba es por inducción. En primer lugar podemos suponer $m_2 = 1$ y basta hacerla para la componente de orden r del r-jet. Para calcular $j^1_D(H\circ\phi)$ hay que tomar en $\nabla(H\circ\phi)$ la componente a lo largo de D (usando la escisión dada por la métrica). A continuación la parte holomorfa, y por último se simetriza. Así,

$$\nabla(H\circ\phi) = \sum_{a=1}^{m_1} \frac{\partial H}{\partial z^a}\nabla\phi_a,$$

es una suma de derivadas parciales de H multiplicada por las componentes $\nabla\phi_a$ de $\nabla\phi$. La expresión algebraica resulta ser la misma que para $j^1H(j^1_D\phi)$, salvo que en la segunda tenemos las derivadas parciales de H multiplicando a las componentes $\nabla\phi_a$ del 1-jet $j^1_D\phi$. En cualquier caso, tomar $\nabla_D(H\circ\phi)$ supone sustituir en la expresión algebraica anterior los $\nabla\phi_a$ por $\nabla_D\phi_a$. Como H es holomorfa, $\partial(H\circ\phi)$ equivale a quedarse con la componente $\partial\phi_a$ de $\nabla_D\phi_a$ (en la expresión algebraica podemos tomar las derivadas parciales de H como función holomorfa). La simetrización no es necesaria para 1-jets.

Para $j^2_D(H\circ\phi)$ ocurre algo similar.

$$\nabla j^1_D(H\circ\phi) = \sum_{b,a=1}^{m_1} \frac{\partial^2 H}{\partial z^a\partial z^b}\nabla\phi_a\otimes\partial\phi_b + \sum_{c=1}^{m_1}\frac{\partial H}{\partial z^c}\nabla\partial\phi_c. \tag{5.8}$$

En esta expresión algebraica llamamos términos de orden $(2,0)$ a los que contiene una derivada covariante segunda, o lo que es lo mismo, una derivada parcial de H primera, y términos de orden $(1,1)$ al resto (una derivada parcial segunda o el producto de dos derivadas covariantes primeras). De nuevo tomar la componente a lo largo de D y luego la parte holomorfa no altera la expresión algebraica; tan sólo sustituimos $\nabla\phi_a$ por $\partial\phi_a$ y $\nabla\partial\phi_c$ por $\partial^2\phi_c$. La expresión algebraica es la misma que la de $j^2H(j^2_D\phi)$. La única diferencia es que en la segunda tenemos $\partial^2_{\mathrm{sym}}\phi_c$, la simetrización de $\partial^2\phi_c$. Por tanto, todo se reduce a demostrar que la simetrización de 5.8 es la misma expresión algebraica pero sustituyendo $\partial^2\phi_c$ por su simetrización.

Observamos que lo dicho hasta ahora vale para cualquier función H. Sobre el punto x que estemos trabajando, definimos $H'\colon \mathbb{C}^{m_1} \to \mathbb{C}$ como la parte homogénea de grado dos del desarrollo de Taylor de H en x. Es evidente que $j^2_D(H'\circ\phi)$ es la parte de grado $(1,1)$ en 5.8. Como hemos visto, la expresión algebraica de $j^2_D(H'\circ\phi)$ coincide con la de $j^2H'(j^2_D\phi)$. Pero en este caso hay una igualdad pues las diferencias sólo ocurre en la parte de orden $(2,0)$. Siendo $j^2H'(j^2_D\phi)$ por hipótesis simétrico ocurre lo propio con $j^2_D(H'\circ\phi)$. En consecuencia la parte de orden $(1,1)$ de $j^2_D(H\circ\phi)$ es simétrica, luego la simetrización, que es lineal, no la altera. Es evidente que la simetrización de cada sumando $\frac{\partial H}{\partial z^c}\nabla\partial\phi_c$ es $\frac{\partial H}{\partial z^c}\partial^2_{\mathrm{sym}}\phi_c$.

Por definición, para calcular $j^rH(j^r_D\phi)$ después de la identificación local (usando cartas adaptadas a la métrica) elegimos F holomorfa cuyo r-jet usual coincida con $j^r_D\phi$, y se define como $j^r_{D_h}(H\circ F)$. Los sumandos son productos tensoriales de elementos $\partial^{r_i}F_{a_1}$ con $\sum r_i = r$, multiplicados por una derivada parcial en las variables z_{a_i} de orden el número de factores en el producto tensorial. Por hipótesis suponemos que al sustituir en esta expresión $\partial^{r_i}F_{a_1}$ por $\partial^{r_i}_{\mathrm{sym}}\phi_{a_i}$ obtenemos $j^r_D(H\circ\phi)$. De ello se sigue que la expresión algebraica para $\nabla j^r_D(H\circ\phi)$ es la de $j^{r+1}(H\circ F)\cong j^{r+1}H(j^{r+1}_D\phi)$. Tomar la parte holomorfa no la altera. En cada sumando de $\partial j^r_D(H\circ\phi)$ todos los factores del producto tensorial salvo a lo sumo 1, que será de la forma $\partial\partial^{r_i}_{\mathrm{sym}}\phi_{a_1}$, serán ya simétricos. Queremos demostrar que $\mathrm{sym}_r(\partial j^r_D(H\circ\phi)) = j^{r+1}H(j^{r+1}_D\phi)$. Como $\mathrm{sym}_r(j^{r+1}H(j^{r+1}_D\phi)) = j^{r+1}H(j^{r+1}_D\phi)$ nos es suficiente probar que la simetrización de cada sumando es igual a sustituir $\partial^{r_i}F_{a_1}$ por $\partial^{r_i}_{\mathrm{sym}}\phi_{a_i}$ y simetrizar la expresión correspondiente, y éste es un resultado elemental relativo a los productos simétricos.

De lo anterior concluimos que el r-jet pseudo-holomorfo de una aplicación a $\mathbb{CP}^m$ está bien definido.

El en caso de una variedad par la definición de $\mathcal{J}^r(M,\mathbb{CP}^m)$ es idéntica. En presencia de una polarización G se puede definir de modo análogo el fibrado de r-jets holomorfos a lo largo de G. Usando las cartas anteriores del proyectivo se consideran los subfibrados $\mathcal{J}^r_G(M,\mathbb{C}^m)_i := (\sum_{j=0}^r (\bar{G}^{*1,0})^{\odot j})\otimes\mathbb{C}^m$, donde $\mathcal{J}^r_G(M,\mathbb{C}^m)_i\subset\mathcal{J}^r(M,\mathbb{C}^m)_i$ usando la escisión $G\oplus G^\perp = TM$. Se comprueba fácilmente que las identificaciones $j^r\Psi_{ji}\colon \mathcal{J}^r(M,\mathbb{C}^m)_i\to\mathcal{J}^r(M,\mathbb{C}^m)_j$ preservan estos subfibrados, ya que por definición los elementos de este subfibrado se caracterizan por anularse cuando actúan sobre algún vector de $G^\perp$; la expresión algebraica que da lugar a la identificación también tiene esta propiedad.

También la prueba que demuestra $j^r\phi$ está bien definida es exactamente la misma que la dada para variedades casi-complejas impares, y una mínima modificación demuestra que el r-jet a lo largo de G está bien definido (en la primera escindimos la derivada covariante para quedarnos con ∇_D y en la segunda hacemos lo propio para obtener ∇_G).

La siguiente propiedad que queremos probar es que hay una submersión $j^r\pi\colon \mathcal{J}^r_D E^*_k\to\mathcal{J}^r_D(M,\mathbb{CP}^m)$ (resp. $j^r\pi\colon\mathcal{J}^rE^*_k\to\mathcal{J}^r(M,\mathbb{CP}^m)$ que restringe a una submersión $\mathcal{J}^r_GE^*_k\to\mathcal{J}^r_G(M,\mathbb{CP}^m)$), de modo que para cualquier sección τ_k de E_k, en los puntos en los que no se anula $j^r_D(\pi\circ\tau_k) = j^r\pi(j^r_D\tau_k)$ (resp. $j^r(\pi\circ\tau_k) = j^r\pi(j^r\tau_k)$ y $j^r_G(\pi\circ\tau_k) = j^r\pi(j^r_G\tau_k)$), i.e., la ecuaciónes 5.5, 5.6 y 5.7 se verifican.

Situándonos de nuevo en el caso de dimensión impar, observamos que la aplicación $j^r\pi$ tiene la misma expresión que en el caso integrable. Es decir, elegimos una identificación local y una sección de L_k para trivializar, de modo que el r-jet σ en cuestión sea el r-jet holomorfo en un punto de una función holomorfa F. Componemos con la carta adecuada φ_i^{-1} para definir $j^r\pi(\sigma)$ como el r-jet de $\varphi_i^{-1}\circ F$; por los mismos motivos anteriores, está bien definido independientemente de las coordenadas A.H. y la carta de $\mathbb{CP}^m$ elegida. Observamos también que no importa la trivialización de L_k escogida, o en otras palabras, la conexión ∇ usada en L_k. El motivo es que $\varphi_i^{-1}\circ F$ es en realidad una sección de $\mathbb{C}^m\otimes(L_k\otimes L_k^{-1})$ con conexión

$\nabla \otimes \nabla^{-1} = d$ (pues componer con la carta corresponde a dividir por una coordenada). También es evidente que $j^r\pi$ es una submersión.

Por último, $j^r_D(\pi \circ \tau_k) = j^r\pi(j^r_D\tau_k)$ porque al componer con una carta φ_i^{-1} por definición $j^r_D(\pi \circ \tau_k)$ es $j^r_D(\varphi_i^{-1} \circ \pi \circ \tau_k)$. Igualmente por definición $j^r\pi(j^r_D\tau_k)$ es $j^r(\varphi_i^{-1} \circ \pi)(j^r_D\tau_k)$, y la igualdad de ambas expresiones ya ha sido probada (pues la definición de $j^r\pi$ no depende de la conexión en L_k, por lo que podemos trivializar el fibrado y considerar la conexión d).

El razonamiento para variedades de dimensión par que prueba que $j^r\pi\colon \mathcal{J}^rE_k^* \to \mathcal{J}^r(M, \mathbb{CP}^m)$ es una submersión y que la ecuación 5.6 se verifica, es exactamente el mismo. Cuando tenemos una polarización G, la conmutatividad del diagrama 5.24 se sigue de la conmutatividad en el caso holomorfo (pues por un camino restringimos la correspondiente función holomorfa a una hoja $\mathbb{C}^g \times \{\cdot\}$ y luego componemos con π, y por el otro hacemos las operaciones en orden opuesto, siendo el resultado el mismo). También es obvio que $j^r\pi\colon \mathcal{J}^r_GE_k^* \to \mathcal{J}^r_G(M, \mathbb{CP}^m)$ es una submersión.

En cuanto al punto (2) de esta definición-proposición es evidente que, tanto para variedades casi-complejas pares como para las impares, la fibra de los fibrados (triviales) de jets pseudo-holomorfos para aplicaciones a $\mathbb{CP}^m$ admite una estructura holomorfa canónica, pues al componer con cada carta se identifican con ciertos $\mathbb{C}^N$, y los cambios de carta son aplicaciones holomorfas ya que sus fórmulas coinciden con las del caso integrable, para el que es obvio que son holomorfas.

Para probar que las $j^r\pi$ son holomorfas a lo largo de las fibras, una vez más usamos que la restricción es una aplicación de $\mathbb{C}^{N_1}$ en la fibra correspondiente (un cierto $\mathbb{C}^N$ tras componer con las cartas inducidas por las φ_i), cuya fórmula es la del caso integrable que resulta ser trivialmente holomorfa.

Es necesario introducir una métrica y una estructura casi-compleja en $\mathcal{J}^r_D(M, \mathbb{CP}^m)$ para así poder dictaminar cuando una sucesión de secciones es A.H. Una vía es mediante el uso de una conexión (por ejemplo proveniente digamos de la conexión de Fubini-Study de $\mathbb{CP}^m$ y de la de T^*D). En nuestro caso elegimos hacer algo diferente pero equivalente. Simplemente seleccionamos un sistema de *cartas holomorfas* para $\mathbb{CP}^m$ de modo que en cada carta sólo nos ocupemos de un dominio compacto, y tal que los cambios de carta para regiones compactas tengan cotas uniformes en la familia. Por ejemplo, en $\mathbb{CP}^1$ podemos tomar todas las cartas resultado de eliminar un hiperplano (punto). Para esta familia compacta trabajaríamos en cada carta fuera de la imagen de la bola de radio ϵ centrada en el punto eliminado (que tiene cierre compacto en la carta).

Cada carta φ define $\mathcal{J}^r_D(M, \mathbb{C}^m)_\varphi \subset \mathcal{J}^r_D(M, \mathbb{CP}^m)$ que es de la forma $\left(\sum_{j=0}^r (\bar{D}^{*1,0})^{\odot j}\right) \otimes \mathbb{C}^m = \mathcal{J}^r_D\mathbb{C}^m$. En cada uno de estos fibrados vectoriales consideramos la estructura casi-compleja y la métrica inducida por la conexión que de modo natural se define si vemos $M \times \mathbb{C}^m \to M$ como una sucesión de fibrados vectoriales hermitianos con la conexión trivial (y la métrica h_0). Componiendo por ejemplo con una de las cartas anteriores φ, es evidente que si τ_k es una sucesión A.H. de E_k, entonces donde su proyectivización ϕ_k está definida, ésta resulta ser una sucesión de funciones A.H. Se sigue por tanto que $j^r_D\tau_k$ es una sucesión A.H. de secciones de $\mathcal{J}^r_D(M, \mathbb{C}^m)_\varphi = \mathcal{J}^r_D\mathbb{C}^m$.

Obsérvese que la noción esta bien definida porque al cambiar de carta las diferentes métricas son comparables. Igualmente, las identificaciones entre $\mathcal{J}^r_D(M,\mathbb{C}^m)_\varphi$ y $\mathcal{J}^r_D(M,\mathbb{C}^m)_{\varphi'}$ son aproximadamente holomorfas, pues usando coordenadas A.H. las correspondientes estructuras casi complejas coinciden de modo aproximado con la canónica de $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m}$, y para éstas el cambio de carta viene dado, tal y como hemos visto, por un difeomorfismo holomorfo. En el caso par ocurre exactamente lo mismo, y si hay una polarización G, usando cartas adaptadas a G se verifica trivialmente que $j^r_G\phi_k$ es una sucesión de secciones A.H. de $\mathcal{J}^r(M,\mathbb{CP}^m)$ cuya imagen cae en el subfibrado $\mathcal{J}^r_G(M,\mathbb{CP}^m)$. □

Una vez que hemos definidos los fibrados no lineales de r-jets de aplicaciones a $\mathbb{CP}^m$ y hemos determinado su relación con $\mathcal{J}^r_D E^*_k$ (resp. $\mathcal{J}^r E^*_k$, $\mathcal{J}^r_G E^*_k$), queremos trasladar problemas de transversalidad de $j^r_D(\pi\circ\tau_k)$ a cuasi-estratificaciones de $\mathcal{J}^r_D(M,\mathbb{CP}^m)$, a problemas de transversalidad de $j^r_D\tau_k$ al pullback de la cuasi-estratificación a $\mathcal{J}^r_D E^*_k$. Siendo un poco más precisos, en primer lugar es necesario definir –para cierta clase de estratos $\mathbb{P}S^a_k$ de $\mathcal{J}^r_D(M,\mathbb{CP}^m)$– los correspondientes subconjuntos $\Theta_{\mathbb{P}S^a_k}$ holónomos transversales, para lo cual veremos que no hay dificultad por estar definidos estos fibrados no lineales mediante pegados de fibrados de la forma $\mathcal{J}^r_D\mathbb{C}^m$. El propósito a la hora de definir estos subconjuntos es doble: por un lado permiten definir la noción de cuasi-estratificación de $\mathcal{J}^r_D(M,\mathbb{CP}^m)$, y en este sentido verifican que cuando consideramos en $S^a_k := j^r\pi^*\mathbb{P}S^a_k$ el subconjunto $\Theta_{S^a_k} := j^r\pi^*\Theta_{\mathbb{P}S^a_k}$, este último no pertenece de modo aproximado a $\Theta_{S^a_k(C^D,C,c)}$, para ciertas constantes. La consecuencia inmediata es que si partimos de una cuasi-estratificación de Whitney $\mathbb{P}S$ adecuada, entonces si consideramos su pullback S y le añadimos los estratos Z_k, obtenemos una cuasi-estratificación de Whitney a falta solamente de asegurarnos que los estratos S^a_k cuando se acercan a Z_k se acumulan en puntos de $Z_k - \Theta_{Z_k}$. El segundo propósito de la introducción de los subconjuntos $\Theta_{\mathbb{P}S^a_k}$ es que intervienen en la definición de la cuasi-estratificación de Thom-Boardman-Auroux (aunque veremos que ésta será refinada en $\mathcal{J}^r_D(M,\mathbb{CP}^m)$ a una estratificación genuina de Whitney, de modo que al hacer pullback y añadir Z_k la condición de ser una cuasi-estratificación sólo será usada para al cierre en Z_k de cada estrato).

En la teoría relativa partimos de una sucesión adecuada de estratos $\mathbb{P}S^G_k$ de $\mathcal{J}^r_G(M,\mathbb{CP}^m)$, y queremos lograr transversalidad uniforme a ellos de $j^r_G(\pi\circ\tau_k)$ haciendo lo propio con $j^r_G\tau_k$ con respecto a $S^G_k := j^r\pi^*\mathbb{P}S^G_k \subset \mathcal{J}^r_G E^*_k$; a su vez esto lo lograremos obteniendo transversalidad a $S_k := p^{r*}_G S^G_k \subset \mathcal{J}^r E^*_k$. Para ello es necesario también definir los subconjuntos $\Theta_{\mathbb{P}S^G_k}$ y estudiar sus propiedades.

Definición-Proposición 5.25. *Si $\mathbb{P}S_k$ es una sucesión de estratos de $\mathcal{J}^r_D(M,\mathbb{CP}^m)$ (resp. $\mathcal{J}^r(M,\mathbb{CP}^m)$), de modo que para una elección de cartas fijas de $\mathbb{CP}^m$ y elecciones de coordenadas A.H. se identifica con un estrato $\mathbb{P}S$ de $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m}$ (resp. $\mathcal{J}^r_{n,m}$) e invariante por la acción de $Gl(n,\mathbb{C})$, entonces existe una definición obvia de $\Theta_{\mathbb{P}S_k}$ que en las identificaciones locales coincide con $\Theta_{\mathbb{P}S}$ (definido en 5.16). Por tanto para S_k –el pullback de $\mathbb{P}S_k$ en $\mathcal{J}^r_D E^*_k$*

(resp. $\mathcal{J}^r E_k^*$)- podemos definir Θ_{S_k} como el pullback de $\Theta_{\mathbb{P}S_k}$. Además se verifica que tomando trivializaciones A.H. de L_k, si consideramos la submersión correspondiente $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m+1} - Z \to \mathcal{J}^r_{D_h,n,m}$ (resp. $\mathcal{J}^r_{n,m+1} - Z \to \mathcal{J}^r_{n,m}$) en la que S_k se identifica con un estrato S, la imagen de Θ_{S_k} en la carta coincide exactamente con Θ_S (cuya definición es la dada en 5.16). Por último, se cumple que los puntos en $S_k - \Theta_{S_k}$ de modo aproximado no pertenecen a $\Theta_{S_k(C^D,C,c)}$ (resp. $\Theta_{S_k(C,c)}$), para determinadas contantes.

Para la teoría relativa suponemos que para una elección de coordenadas A.H. adaptadas a G y cartas holomorfas del proyectivo, la sucesión $\mathbb{P}S_k^G \subset \mathcal{J}^r_G(M, \mathbb{CP}^m)$ se identifica con un estrato $\mathbb{P}S^G$ de $\mathcal{J}^r_{\mathbb{C}^g,n,m} = \mathcal{J}^r_{g,m} \times \mathbb{C}^{n-g}$, invariante por la acción de $Gl(g,\mathbb{C})$. Entonces existe una definición obvia de $\Theta_{\mathbb{P}S_k^G}$ que en las identificaciones locales coincide con $\Theta_{\mathbb{P}S^G}$. Sin más que hacer pullback de este subconjunto por cualquiera de los dos lados del diagrama conmutativo 5.24 tenemos una definición global de Θ_{S_k}. Yendo por la parte baja del diagrama conmutativo 5.24 podemos definir $\mathbb{P}S_k := p_G^{r*}\mathbb{P}S_k^G$, y se tiene que $\Theta_{\mathbb{P}S_k}$ (definido en el primer párrafo de esta definición-proposición) coincide con $p_G^{r*}\Theta_{\mathbb{P}S_k^G}$. Por tanto, podemos aplicar el párrafo anterior para concluir que los puntos de $S_k - \Theta_{S_k}$ aproximadamente no pertenecen a $\Theta_{S_k(C,c)}$, para determinadas contantes.

DEFINICIÓN-PRUEBA. Queremos definir los conjuntos $\Theta_{\mathbb{P}S_k}$ y Θ_{S_k} y ver la relación de estos últimos con los subconjuntos $\Theta_{S_k(C^D,C,c)}$ de S_k. En primer lugar si suponemos la existencia de cartas con las propiedades citadas, tenemos los fibrados $\mathcal{J}^r_D(M,\mathbb{CP}^m)_i = \mathcal{J}^r_D\mathbb{C}^m$ para los que la definición de $\Theta_{S_{k,i}}$ y su identificación con Θ_{S_i} es obvia, por ser los fibrados de r-jets pseudo-holomorfos de una sucesión (constante) de fibrados triviales con conexión trivial, y ser los estratos invariantes por la acción de $Gl(n,\mathbb{C})$. De nuevo, sólo tenemos que probar que pegan bien mediante las aplicaciones $j^r\Psi_{ji}$. Una vez más, al disponer de la citada identificación local basta con estudiar la situación en el caso integrable.

Sea ψ un r-jet en $\Theta_{\mathbb{P}S_i}$. Esto implica la existencia de un $\tilde{\psi}$ levantándolo y una sección local α con las propiedades obvias. Tal y como hemos indicado, la representación local de $\tilde{\psi}$ es esencialmente única a efectos de transversalidad al estrato. Ello implica que cualquier otra tendrá esta propiedad. En particular, $\tilde{\psi}$ es por definición el $(r+1)$-jet de una función holomorfa local F (independiente de s_k si se quiere). Por definición, $j^r_{D_h}F(0) = \psi$ y $d_{D_h}j^r_{D_h}F(0) = \partial j^r_{D_h}F(0) = j^{r+1}_{D_h}F(0) = \tilde{\psi}$. Se sigue por tanto que $j^{r+1}\Psi_{ji}\tilde{\psi}$ es un levantamiento de $j^r\Psi_{ji}\psi$ con representación local $j^r\Psi_{ji}j^r_{D_h}F = j^r_{D_h}(\Psi_{ij} \circ F)$, que es obviamente transversal a $j^r\Psi_{ji}\mathbb{P}S_i = \mathbb{P}S_j$, pues esta aplicación es un difeomorfismo.

Al estar $\Theta_{\mathbb{P}S_k}$ bien definido lo propio ocurre con su pullback a $\mathcal{J}^r_D E_k^*$. Ahora queremos probar que para la submersión $j^r\pi\colon \mathcal{J}^r_{D_h,n,m+1} - Z \to \mathcal{J}^r_{D_h,n,m}$ el pullback de $\Theta_{\mathbb{P}S}$ coincide con Θ_S, lo cual se sigue fácilmente de las ideas anteriores. Si σ es un r-jet cualquiera que se proyecta en ϕ, cualquier levantamiento $\tilde{\psi}$ es proyección de uno $\tilde{\sigma}$. Para este último tenemos una representación local $j^r_{D_h}H$, con H holomorfa, y es claro que $j^r_{D_h}(\pi \circ H)$

es una representación local para $\tilde{\psi}$. Como $j^r\pi$ es una submersión, la transversalidad de $j^r_{D_h}H$ a S es equivalente a la transversalidad de $j^r_{D_h}(\pi\circ H)$ a $\mathbb{P}S$.

Para finalizar probaremos que todo r-jet $\sigma \in S_k - \Theta_{S_k}$ no pertenece de modo aproximado a $\Theta_{S_k(C^D,C,c)}$, para ciertas constantes que dependen esencialmente de la norma de los levantamientos $\tilde{\sigma}$ considerados y de las constantes asociadas a las bases $\nu_{k,x,I}$. La no pertenencia de dicho σ a Θ_{S_k} es equivalente a la no pertenencia de $j^r\pi(\sigma) = \psi$ a $\Theta_{\mathbb{P}S_k}$. Sabemos que para cualquiera que sea el levantamiento $\tilde{\sigma}$ de σ, es posible encontrar representaciones locales A.H. de la forma $\alpha = j^r_D\xi_k + h_I j^r_D\tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I}$, donde las h_I son polinomios de grado 1 en las coordenadas $x^1_k, y^1_k, ..., x^n_k, y^n_k$ de tamaño $O(c_k^{-1/2})$. Es evidente que $j^r\pi(\alpha) - j^r_D(\pi\circ\xi_k)$ y su derivada a lo largo de D tienen tamaño $O(c_k^{-1/2})$, lo que en particular implica que $j^r\pi(\alpha)$ está a distancia $O(c_k^{-1/2})$ de definir un levantamiento de ϕ. De ello se deduce que el ángulo con que $j^r\pi(\alpha)$ corta a $\mathbb{P}S_k$ es a lo sumo de orden $O(c_k^{-1/2})$, lo que a su vez implica el mismo resultado para α y S_k.

En la teoría relativa para cada carta φ_i^{-1} tenemos una sucesión de subfibrados vectoriales $\mathcal{J}^r_G(M,\mathbb{C}^m)_i \hookrightarrow \mathcal{J}^r(M,\mathbb{C}^m)_i$. El subfibrado tiene la conexión inducida por la de $\mathcal{J}^r(M,\mathbb{C}^m)_i$ (que es la que proviene de modo natural de la inducida por la de Levi-Civita y la métrica en $\bar{G}^*$). Es posible modificar ligeramente la trivialización de $\bar{G}^{*1,0}$ que proviene de las cartas adaptadas a G (la perturbación es de tamaño $O(c_k^{-1/2})$), para que la correspondiente conexión tenga forma de conexión trivial en el origen. Si la estratificación es invariante respecto a la acción de $Gl(g,\mathbb{C})$, entonces se puede definir de modo obvio el subconjunto $\Theta_{\mathbb{P}S^G_{k,i}}$ y tras la identificación local coincide con $\Theta_{\mathbb{P}S^G_i}$ (pues para cada $\mathcal{J}^r_G(M,\mathbb{C}^m)_i$ con la acción de $Gl(g,\mathbb{C})$ en la fibra logramos que la forma de conexión se anule). Usando la identificación local con r-jets foliados holomorfos se prueba que los subconjuntos holónomos transversales pegan bien al cambiar de carta. Para $\mathbb{P}S_k := p^{r*}_G\mathbb{P}S^G_k$, tenemos los conjuntos $\Theta_{\mathbb{P}S_k}$. Empleando de nuevo la identificación local por cartas adaptadas a G, se tiene que los r-jets a lo largo de G se identifican con $\mathcal{J}^r_{\mathbb{C}^g,n,m} = \mathcal{J}^r_{g,m}\times\mathbb{C}^{n-g}$, y la proyección de $\mathcal{J}^r_{n,m}$ sobre el subfibrado es la proyección trivial suprimiendo determinadas coordenadas (aquellas correspondientes a elementos de la base $\mu_{k,x,I}$, donde I no es de la forma I_g). De esto se sigue que $\Theta_{\mathbb{P}S}$ es el pullback de $\Theta_{\mathbb{P}S^G}$. El argumento que usamos es que la proyección $\mathcal{J}^r_{n,m} \to \mathcal{J}^r_{\mathbb{C}^g,n,m}$ viene inducida por la submersión holomorfa canónica $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^g$, lo que nos permite razonar exactamente igual que como lo hicimos para probar que $\Theta_S \subset \mathcal{J}^r_{n,m+1}$ coincide con el pullback de $\Theta_{\mathbb{P}S} \subset \mathcal{J}^r_{n,m}$. Usando el lado inferior y el izquierdo del diagrama conmutativo 5.24 se obtiene una descripción local de Θ_{S_k} (que se define como el pullback usando cualquiera de los dos lados del cuadrado) como $j^r\pi^*\Theta_{\mathbb{P}S_k}$, y por tanto aplicando la parte primera de esta proposición se tiene que los puntos de $S_k - \Theta_{S_k}$ aproximadamente no pertenecen a $\Theta_{S_k(C,c)}$, para ciertas constantes.

□

La cuasi-estratificación de Thom-Boardman-Auroux no es más que el pullback a $\mathcal{J}_D^r E_k^*$ mediante $j^r\pi$ de la correspondiente estratificación en $\mathcal{J}_D^r(M, \mathbb{CP}^m)$ (véase por ejemplo [**1**, **7**]), completada con los estratos Z_k. La definición es la misma que la dada por D. Auroux en [**4**]. Veámosla.

Dado $\sigma \in \mathcal{J}_D^r E_k^*$, denotamos por $\phi = (\phi_0, ..., \phi_r)$ su imagen en $\mathcal{J}_D^r(M, \mathbb{CP}^m)$. Se define

$$\Sigma_{k,i} = \{\sigma \in \mathcal{J}_D^r E_k^* | \dim_{\mathbb{C}} \ker \phi_1 = i\}$$

Si $\max(0, n-m) < i \leq n$, los $\Sigma_{k,i}$ son subvariedades diferenciables cuya frontera es la unión de $\cup_{j>i}\Sigma_{k,j}$, y de un subconjunto de $Z_k - \Theta_{Z_k}$.

Es evidente que $\Sigma_{k,i}$ está definido mediante condiciones para ϕ. Además también es obvio que los estratos son pullback de estratos constantes y holomorfos $\mathbb{P}\Sigma_{k,i}$, y no hay dificultad en verificar la descripción dada de sus cierres (también a la vista de la descripción dada de Θ_{Z_k}).

Para $r \geq 2$, $\Theta_{\Sigma_{k,i}}$ es el conjunto de r-jets $\sigma = (\sigma_0, ..., \sigma_r) \in \Sigma_i$ tal que

$$\Xi_{k,i;\sigma} = \{u \in D^{1,0}, (i_u\sigma, 0) \in T_\sigma \Sigma_{k,i}\}$$

tiene la codimensión esperada en $D^{1,0}$, que no es otra que la codimensión de $\Sigma_{k,i}$ en $\mathcal{J}_D^r E_k$.

En efecto, podemos trabajar con las proyecciones y observar que $\Theta_{\mathbb{P}\Sigma_{k,i}}$ son exactamente aquellos elementos de $\mathbb{P}\Sigma_{k,i}$ para los que hay levantamientos con representaciones locales transversales. Es evidente que como el término añadido al r-jet es de orden $r+1 > 2$, el resultado no depende del levantamiento, que puede ser por ejemplo con componente de grado $r+1$ nula. Definimos

$$\mathbb{P}\Xi_{k,i;\sigma} = \{u \in D^{1,0}, (i_u\phi, 0) \in T_\phi \mathbb{P}\Sigma_{k,i}\},$$

Se comprueba que $\Theta_{\mathbb{P}\Sigma_{k,i}}$ son los ϕ para los que $\mathbb{P}\Xi_{k,i;\sigma}$ tiene la codimensión de $\mathbb{P}\Sigma_{k,i}$ en $\mathcal{J}_D^r(M, \mathbb{CP}^m)$. Es fácil ver usando las ideas de la proposición 5.25 que el pullback de $\Theta_{\mathbb{P}\Sigma_{k,i}}$ es el conjunto descrito anteriormente.

Si $p+1 \leq r$, definimos inductivamente

$$\Sigma_{k,i_1,...,i_p,i_{p+1}} = \{\sigma \in \Theta_{k,i_1,...,i_p}, \dim \ker(\phi_1 \cap \Xi_{k,i_1,...,i_p;\sigma}) = i_{p+1}\},$$

con

$$\Xi_{k,I;\sigma} = \{u \in D^{1,0}, (i_u\sigma, 0) \in T_\sigma \Sigma_{k,I}\}.$$

Como en el caso previo, se define $\Theta_{\Sigma_{k,I}}$ como los puntos en los que la codimensión de $\Xi_{k,I;\sigma}$ en $D^{1,0}$ es la misma que la codimensión de $\Sigma_{k,I}$ en $\mathcal{J}_D^r E_k$.

Si $i_1 \geq \cdots \geq i_{p+1} \geq 1$, $\Sigma_{k,i_1,...,i_{p+1}}$ es una subvariedad diferenciable (constante y holomorfa) cuyo cierre en $\Sigma_{k,i_1,...,i_p}$ es la unión de los $\Sigma_{k,i_1,...,i_p,j}$, $j > i_{p+1}$, un subconjunto de $\Sigma_{k,i_1,...,i_p} - \Theta_{k,i_1,...,i_p}$ [**7**]. El problema es que para valores altos de r, n, m, el cierre total del estrato resulta muy complicado de analizar, y lo que hemos definido, una vez añadido Z_k, puede muy bien no ser una cuasi-estratificación de Whitney. Para valores bajos de r, n, m lo que tenemos en $\mathcal{J}_D^r E_k$ resulta ser una cuasi-estratificación de Whitney, por provenir de una estratificación de Whitney de $\mathcal{J}_D^r(M, \mathbb{CP}^m)$ y por no acumularse los estratos en ningún punto de Θ_{Z_k}.

En cualquier caso se pueden usar los resultados de Mather [**39**] para refinar *la estratificación de* $\mathcal{J}_D^r(M, \mathbb{CP}^m)$ (que es constante, holomorfa e invariante por la acción de $Gl(n,\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_m^r$, siendo $\mathcal{H}_m^r$ el grupo de r-jets de transformaciones biholomorfas de $\mathbb{C}^m$ en $\mathbb{C}^m$), de modo que localmente (tras las identificaciones) obtenemos una estratificación de Whitney constante, holomorfa e invariante por la acción de $Gl(n,\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_m^r$ en cada $\mathcal{J}_{D_h,n,m}^r$, y tal que las subvariedades $\mathbb{P}\Sigma_{k,I}$ son uniones de estratos del refinamiento. Como consecuencia de la citada invariancia los refinamientos –definidos eligiendo cartas en $\mathbb{CP}^m$ y coordenadas A.H.– éstos pegan bien y definen un refinamiento que es independiente de las elecciones. De este modo el pullback es una estratificación finita de Whitney de $\mathcal{J}_D^r E_k^*$ tal que los $\Sigma_{k,I}$ son unión de estratos. Es importante reseñar que como todos los estratos están contenidos en el cierre de $\Sigma_{k,\max(0,n-m)+1}$, las fronteras cerca de Z_k están contenidas en $Z_k - \Theta_{Z_k}$. Por tanto al añadir Z_k se obtiene una cuasi-estratificación de $\mathcal{J}_D^r E_k$.

Si hay una polarización trabajamos con las mismas definiciones pero usando $\mathcal{J}_G^r E_k$ y $\mathcal{J}_G^r(M, \mathbb{CP}^m)$; el resultado es en primer lugar una estratificación $\mathbb{P}\mathcal{S}^G$ de de $\mathcal{J}_G^r(M, \mathbb{CP}^m)$ que localmente –como $\mathcal{J}_{\mathbb{C}^g,n,m}^r$ se identifica con $\mathcal{J}_{g,m}^r \times \mathbb{C}^{n-g}$– coincide con la correspondiente estratificación de Thom-Boardman de $\mathcal{J}_{g,m}^r$ multiplicada por $\mathbb{C}^{n-g}$ (análogamente a lo que ocurre en el caso impar que localmente es una versión uniparamétrica del caso par). Yendo por la parte baja del cuadrado conmutativo, el pullback de esta estratificación $\mathbb{P}\mathcal{S}$ se reduce localmente multiplicar por las coordenadas restantes de $\mathcal{J}_{n,m}^r$, pues recordemos que la submersión $\mathcal{J}_{n,m}^r \to \mathcal{J}_{\mathbb{C}^g,n,m}^r$ es sin más la supresión de determinadas coordenadas. Por tanto para refinar $\mathcal{S}$, el pullback de $\mathcal{S}^G$ a $\mathcal{J}^r E_k^*$, procedemos por la parte baja del diagrama de refinando primero $\mathbb{P}\mathcal{S}^G$ localmente (lo que a su vez hacemos refinando una fibra de $\mathbb{P}\mathcal{S}^G$ en $\mathcal{J}_{g,m}^r \times \mathbb{C}^{n-g}$). Los refinamientos locales de $\mathbb{P}\mathcal{S}^G$ pegan bien pues son invariantes mediante la acción de $Gl(g,\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_m^r$ y por tanto definen una estratificación de Whitney en $\mathcal{J}_G^r(M, \mathbb{CP}^m)$ que no depende ni de las coordenadas A.H. adaptadas a G ni de las cartas de $\mathbb{CP}^m$ elegidas. Su pullback a $\mathcal{J}_G^r E_k^*$ refina $\mathcal{S}^G$ a otra estratificación de Whitney. Finalmente el pullback de esta ultima mediante $p_G^r \colon \mathcal{J}^r E_k^* \to \mathcal{J}_G^r E_k^*$ es otra estratificación de Whitney que refina a $\mathcal{S}$, a la que añadimos Z_k (que es el pullback de $Z_k^G \subset \mathcal{J}_G^r E_k$), siendo el resultado una cuasi-estratificación de $\mathcal{J}^r E_k$ (las descripciones locales implican que los estratos se acumulan en puntos de $Z_k - \Theta_{Z_k}$).

Definición 5.26. *(ver* [**5**]*). Dada* (M, D, J, g) *(resp.* (M, J, G, g)*) y una sucesión muy amplia de fibrados de línea* L_k*, y denotando* $\mathbb{C}^{m+1} \otimes L_k$ *por* E_k*, la cuasi-estratificación de Thom-Boardman-Auroux (T-B-A) de* $\mathcal{J}_D^r E_k$ *(resp.* $\mathcal{J}^r E_k$*,* $\mathcal{J}_G^r E_k$*) es la cuasi-estratificación dada por la subvariedad* $Z_k \subset \mathcal{J}_D^r E_k$ *(resp.* $Z_k \subset \mathcal{J}^r E_k$*,* $Z_k^G \subset \mathcal{J}_G^r E_k$*) y un refinamiento como el descrito de la estratificación de Thom-Boardman de* $\mathcal{J}_D^r E_k^*$ *(resp. de* $\mathcal{J}^r E_k^*$*,* $\mathcal{J}_G^r E_k^*$*).*

Decimos que una sucesión τ_k *A.H. de secciones de* $E_k \to (M, D, J, g)$ *(resp.* $E_k \to (M, J, g)$*) es* r*-genérica si es uniformemente transversal a la cuasi-estratificación de Thom-Boardman-Auroux. En tal situación hablaremos equivalentemente de* r*-genericidad de* ϕ_k*, la sucesiones de aplicaciones a* $\mathbb{CP}^m$ *inducidas (fuera de las subvariedades base).*

Lema 5.27. *La cuasi-estratificación de Thom-Boardman-Auroux de $\mathcal{J}^r_D E_k$ (resp. $\mathcal{J}^r E_k$) es aproximadamente holomorfa (y evidentemente finita y de Whitney).*

Además, en el caso relativo el pullback a $\mathcal{J}^r E_k$ de la cuasi-estratificación de T-B-A de $\mathcal{J}^r_G E_k$ es también una cuasi-estratificación aproximadamente holomorfa.

PRUEBA. En primer lugar la descripción de los cierres de los estratos en Z_k implica que la condición de cuasi-estratificación se cumple. Hacemos notar que para valores pequeños de r, n, m para los que no es necesario refinar para obtener una estratificación de Whitney en $\mathcal{J}^r_D(M, \mathbb{CP}^m)$, su pullback es una cuasi-estratificación de $\mathcal{J}^r_D E_k$ una vez añadimos los estratos Z_k.

El punto más delicado es comprobar que los estratos son efectivamente aproximadamente holomorfos. En primer lugar nos centramos en la sucesión Z_k. Aunque para esta sucesión la propiedad es obvia lo demostraremos de un modo que tendrá consecuencias interesantes.

En efecto, $Z_k \subset E_k$ es obviamente una sucesión A.H. Veremos que la proyección natural $\pi^r_{r-h}\colon \mathcal{J}^r_D E_k \to \mathcal{J}^{r-h}_D E_k$ es A.H. De este modo, el pullback de una sucesión A.H. de estratos en $\mathcal{J}^{r-h}_D E_k$ dará lugar a una sucesión A.H. de estratos de $\mathcal{J}^r_D E_k$. En particular, $Z_k \subset \mathcal{J}^r_D E_k$ será una sucesión de estratos A.H. por ser el pullback de la sección $\mathbf{0}$ de E_k.

La proyección π^r_{r-h} es obviamente A.H. pues localmente la elección de coordenadas A.H. y de una base de secciones de referencia $j^r_D \tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I}$, da lugar a coordenadas A.H. del espacio total, $z^1_k, ..., z^n_k, u^I_k, s_k$ (I recorriendo las $(n+1)$-tuplas usuales). Como la imagen de $j^r_D \tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I}$ es $j^{r-h}_D \tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I}$, que es una sección A.H. (y por tanto vendrá dada por coordenadas A.H. $v^{I'}_k(z_k, s_k)$ para una base de secciones $j^r_D \tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I'}$, donde I' recorre las $(n+1)$-tuplas adecuadas), y la proyección es lineal compleja en las fibras, la aplicación es evidentemente A.H. (de nuevo tenemos el problema de la elección de coordenada "vertical" s_k, pero en cualquier caso el comentario de la prueba del lema 5.14 también se aplica aquí).

Para los estratos Σ_I queremos hacer algo similar con la proyección $j^r\pi\colon \mathcal{J}^r_D E^*_k \to \mathcal{J}^r_D(M, \mathbb{CP}^m)$.

Tenemos similares propiedades pues la imagen de una trivialización $j^r_D \tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I}$ es $j^r_D(\pi \circ \tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I})$ también A.H. Igualmente a lo largo de las fibras la función es holomorfa, aunque la diferencia estriba en la no linealidad de dichas restricciones.

Adoptamos pues una estrategia diferente. La holomorfía aproximada de la aplicación a orden cero (la norma de la parte $(1,0)$ de la diferencialde la aplicación) es obvia. Si ambas estructuras fuesen integrables, bastaría estudiar la diferencial y determinar eventualmente su holomorfía. Podemos encontrar localmente (en el producto de una bola de g_k-radio $O(1)$ en la base por una bola en la fibra de radio también $O(1)$) nuevas distribuciones con estructuras casi-complejas en los espacios totales de los fibrados que son integrables, coinciden aproximadamente con las iniciales y para las que $j^r\pi$ es holomorfa.

Para ello tomamos cartas de Darboux para L_k y sustituimos D, J por D_h, J_0. Los resultados de la proposición 4.6 en el caso integrable (y para curvatura con derivada trivial, como es el caso de ω_0) implican que las perturbaciones de la conexión definen una estructura compleja integrable $\bar{J}$. La integrabilidad para $\bar{J}_0$ en $\mathcal{J}^r_{D_h}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{CP}^m)$ es obvia. Recordemos que tras la identificación local de los jets con $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m+1}$ y $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m}$ se ha comprobado que la definición de $j^r\pi$ coincide con la de la situación integrable, para la que la holomorfía muy clara por serlo a lo largo de las fibras y enviar suficientes secciones holomorfas de $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m+1}$ a secciones holomorfas de $\mathcal{J}^r_{D_h,n,m}$. Más concretamente, para cada punto $\sigma \in \mathcal{J}^r_{D_h,n,m+1}$, y para cada vector v en el espacio tangente que no sea tangente a la fibra, podemos hallar una función holomorfa F cuyo r-jet en x es σ y tal que el espacio tangente al grafo contiene a v. Como $j^r\pi(j^r_{D_h}F) = j^r_{D_h}(\pi \circ F)$ también es una sección holomorfa, se deduce que $j^r\pi_*(\bar{J}v) = \bar{J}_0(j^r\pi_*(v))$.

Igualmente es evidente que en el dominio en el que trabajamos la nuevas estructuras complejas integrables coinciden aproximadamente con las iniciales.

Exactamente la misma prueba demuestra que $j^r\pi\colon \mathcal{J}^r E_k^* \to \mathcal{J}^r(M, \mathbb{CP}^m)$ es A.H. En el caso relativo, y para una sucesión de estratos $\mathbb{P}S_k$ verificando las condiciones de 5.25, la holomorfía aproximada de $p_G^{r*} j^r\pi^* S_k$ se sigue de la conmutatividad del diagrama 5.24, y de la holomorfía aproximada de $j^r\pi\colon \mathcal{J}^r E_k^* \to \mathcal{J}^r(M, \mathbb{CP}^m)$ y de $p_G^r\colon \mathcal{J}^r(M, \mathbb{CP}^m) \to \mathcal{J}_G^r(M, \mathbb{CP}^m)$ (para esta última se sigue fácilmente de que la proyección ortogonal $T^{*1,0}M \to \bar{G}^{*1,0}$ es J-lineal).

□

Observación 5.28: Ahora ya podemos indicar de un modo más preciso como aplicar la teoría relativa. En efecto, si trabajamos con la simplectización (M, D, J, g), o incluso con (M, ω) variedad sympléctica en la que tenemos N (resp. (Q, D)) una subvariedad simpléctica (resp. calibrada) y G una distribución casi compleja extendiendo TN (resp. D), y partimos de χ_k sucesión A.H. de E_k, sabemos por el apartado 2.3 que la restricción de χ_k a N (resp. Q) es una sucesión de secciones A.H. Podemos por tanto proyectivizarla para obtener $\phi_{k|N}$ (resp. $\phi_{k|Q}$) una aplicación a $\mathbb{CP}^m$, cuya r-genericidad se reduce a un problema de transversalidad para $j^r(\phi_{k|N})$ (resp. $j^r_D(\phi_{k|Q})$), que es una sección de $\mathcal{J}^r(N, \mathbb{CP}^m)$ (resp. $\mathcal{J}^r_D(Q, \mathbb{CP}^m)$). Teniendo en cuenta que cuando tomamos cartas del proyectivo el fibrado no lineal anterior se identifica con $\mathcal{J}^r(N, \mathbb{C}^m)$ (resp. $\mathcal{J}^r_D(Q, \mathbb{C}^m)$) –para el que no hay curvatura– es evidente que el r-jet coincide de modo aproximado con $\nabla^r(\phi_{k|N})$ (resp. $\nabla^r_D(\phi_{k|Q})$). Igualmente $j^r_G\phi_k$, el r-jet a lo largo de G –definido en todos los puntos de M en donde G está definida– coincide de modo aproximado con $\nabla^r_G\phi_k$. Igual que indicamos en el apartado 2.3 y teniendo en cuenta la ausencia de curvatura, se comprueba que $(\nabla^r_G\phi_k)_{|N} \approxeq \nabla^r(\phi_{k|N})$ (resp. $(\nabla^r_G\phi_k)_{|Q} \approxeq \nabla^r_D(\phi_{k|Q})$). Por tanto el r-jet a lo largo de G $j^r_G\phi_k$ extiende de modo aproximado al r-jet de la restricción de ϕ_k. La última observación necesaria es que la identificación de $\mathcal{J}^r(N, \mathbb{CP}^m)$ (resp. $\mathcal{J}^r_D(Q, \mathbb{CP}^m)$) con $\mathcal{J}^r_G(M, \mathbb{CP}^m)$ en los puntos de la subvariedad inducida por $T^*N \cong \bar{G}^*$ (resp.

$\bar{D}^* \cong \bar{G}^*$)–consecuencia de la retracción métrica– preserva las estratificaciones de T-B-A. En consecuencia, si obtenemos transversalidad uniforme de $j^r_G \phi_k$ en los puntos de la subvariedad a la estratificación de T-B-A de $\mathcal{J}^r_G(M, \mathbb{CP}^m)$, también obtenemos transversalidad uniforme para el r-jet de la restricción.

6. El teorema principal

Tal y como hemos venido mencionando, para la mayoría de las aplicaciones necesitaremos partir de secciones A.H. de E_k que perturbaremos para que sus r-jets sean transversales a cuasi-estratificaciones A.H. de $\mathcal{J}^r_D E_k$. Será posible controlar las cotas de dicha perturbación a lo largo de las direcciones de D hasta un orden finito arbitrario. Introducimos para ello una nueva notación: diremos que una sección τ_k es $C^{\geq h}$-A.H.(C^D) si la sucesión es A.H., i.e., hay cotas para las derivadas de todos los órdenes, y la constante C^D controla la norma y derivadas a lo largo de D hasta orden h. También hablaremos de secciones $C^{\geq h}$-A.H. sin mencionar explícitamente la cota.

Teorema 6.1. *Sea E_k una sucesión muy amplia de fibrados vectoriales hermitianos localmente escindibles y $\mathcal{S} = (S^a_k)_{a \in A_k}$ una sucesión $C^{\geq h}$-A.H. de cuasi-estratificaciones finitas de Whitney de $\mathcal{J}^r_D E_k$ $(h \geq 2)$. Sea δ una constante positiva. Existe una constante $\eta > 0$ tal que para cualquier sucesión τ_k $C^{\geq r+h}$-A.H.(C^D) de E_k, es posible encontrar una sucesión A.H. σ_k de E_k de modo que para todo k mayor que un cierto K,*

(1) $|\nabla^j_D(\tau_k - \sigma_k)|_{g_k} < \delta, j = 0, ..., r + h.$
(2) $j^r_D \sigma_k$ *es η-transversal a $\mathcal{S}$.*

En el enunciado anterior K y las constantes $\tilde{C}_j$ controlando las derivadas totales y la parte antiholomorfa de σ_k dependerán de toda la sucesión de cotas (C^D_j, C_j) de τ_k (que podemos suponer creciente). La constante η no será en general independiente de un número finito de las C^D_j y C_j

Es muy importante que todas nuestras construcciones no dependan del tamaño de las constantes C_j de la sucesiones a las que se las apliquemos. El motivo es que estas cotas pueden ir cambiando a medida que modificamos las secciones (la perturbación final será el resultado de añadir de modo sucesivo un número muy elevado de pequeñas perturbaciones). La única dependencia que admitimos es la de la elección de la constante K a partir de la cual nuestras afirmaciones se verifican: por ejemplo, en coordenadas A.H. para pasar de cotas a lo largo de D_h a cotas a lo largo de D *son necesarias las cotas globales*, aunque no su valor exacto (lo contrarrestamos aumentando k); igualmente ocurre al hacer arbitrariamente pequeñas las partes antiholomorfas (de tamaño $C_r c_k^{-1/2}$). También haremos depender ciertas construcciones en la cota C_{r+2} de la sección inicial τ_k que queremos perturbar.

Tendremos también un resultado análogo de transversalidad a lo largo de subvariedades compactas para variedades casi-complejas de dimesión par con polarización. La prueba es una modificación menor de la dada por D. Auroux en [4] para variedades casi-complejas pares unida a los resultados locales de J. P. Mohsen [**43**]. Aún así enunciaremos el correspondiente teorema.

Teorema 6.2. *Sea E_k una sucesión muy amplia de fibrados vectoriales hermitianos localmente escindibles sobre la variedad casi-compleja polarizada (M, J, G, g) de dimensión par, y sea Q una subvariedad compacta de M. Consideremos $\mathcal{S} = (S_k^a)_{a \in A_k}$ una sucesión C^h-A.H. de cuasi-estratificaciones finitas de Whitney de $\mathcal{J}^r E_k$ cuyos estratos son pullback de estratos (subvariedades) de $\mathcal{J}_G^r E_k$ ($h \geq 2$). Sea δ una constante positiva. Existen una constante $\eta > 0$ y un número natural K tal que para cualquier sucesión C^{r+h}-A.H.(C) τ_k de E_k, es posible encontrar una sucesión C^{r+h}-A.H. σ_k de E_k tal que para todo k mayor que K,*

(1) $|\nabla^j(\tau_k - \sigma_k)|_{g_k} < \delta, j = 0, ..., r+h$ *(σ_k es C^{r+h}-A.H.(δ)).*
(2) *$j_G^r \sigma_k$ es η-transversal a $\mathcal{S}$ a lo largo de Q (de las direcciones de TQ en los puntos de Q).*

Obsérvese que en el caso relativo no tenemos por qué trabajar con sucesiones cuyas derivadas de todos los órdenes estén controladas, y tanto K como η dependen sólo de C. No es así en el caso impar porque el comportamiento de las sucesivas perturbaciones es mucho peor por ser la distribución D no integrable en general; básicamente, las derivadas a lo largo de las direcciones de D serán arbitrariamente pequeñas sólo si tenemos controladas las derivadas totales hasta un orden muy alto, y k se hace muy grande. La razón exacta quedará clara a lo largo de la prueba.

El teorema 6.2 no es realmente el resultado que buscábamos, pero casi; nuestro objetivo es un teorema de transversalidad para "cuasi-estratificaciones" $\mathcal{S}^G$ de $\mathcal{J}_G^r E_k$ (realmente lo que tiene que ser una cuasi-estratificación es $\mathcal{S} \subset \mathcal{J}^r E_k$, el pullback de $\mathcal{S}^G$). El motivo de recurrir al fibrado $\mathcal{J}^r E_k$ es no tener que demostrar la amplitud del fibrado $\mathcal{J}_G^r E_k$.

Si tenemos una estratificación $\mathcal{S}_k^G$ en $\mathcal{J}_G^r E_k$ la manera de definir transversalidad con respecto a una distribución TQ de TM es la obvia; simplemente notamos que para el transporte paralelo usamos la métrica en $\mathcal{J}_G^r E_k$ inducida por la de $\mathcal{J}^r E_k$; usando además trivializaciones locales de E_k, cartas aproximadamente holomorfas adaptadas a G y la correspondiente métrica euclídea, obtenemos identificaciones locales para $\mathcal{J}^r E_k \cong \mathcal{J}_{n,m+1}^r$ y $\mathcal{J}_G^r E_k \cong \mathcal{J}_{\mathbb{C}^g, n, m+1}^r$ de modo que $\mathcal{J}_{n,m+1}^r = \mathcal{J}_{g,m+1}^r \times \mathbb{C}^u$; es más, hemos visto que la estratificación $\mathcal{S}$ de $\mathcal{J}_{n,m+1}^r$ también aparece como un producto de $\mathcal{S}^G$ por $\mathbb{C}^u$. La métrica euclídea es comparable a $\hat{g}_k$ y a la inducida en $\mathcal{J}_G^r E_k$ (la restricción de la euclídea a esta última subvariedad); para la métrica euclídea transversalidad estimada de $j_G^r \tau_k$ a $\mathcal{S}$ es exactamente lo mismo que transversalidad estimada de $j_G^r \tau_k$ a $\mathcal{S}^G$. La consecuencia de todo esto es el siguiente resultado.

Corolario 6.3. *Sea E_k una sucesión muy amplia de fibrados vectoriales hermitianos localmente escindibles sobre la variedad casi-compleja polarizada*

(M, J, G, g) de dimensión par, y sea Q una subvariedad compacta de M. Consideremos $\mathcal{S} = (S_k^a)_{a \in A_k}$ una sucesión de estratificaciones de $\mathcal{J}_G^r E_k$ cuyo pullback a $\mathcal{J}^r E_k$ es una sucesión C^h-A.H. de cuasi-estratificaciones finitas de Whitney ($h \geq 2$). Sea δ una constante positiva. Existen una constante $\eta > 0$ y un número natural K tal que para cualquier sucesión C^{r+h}-A.H.(C) τ_k de E_k, es posible encontrar una sucesión C^{r+h}-A.H. σ_k de E_k tal que para todo k mayor que K,

(1) $|\nabla^j(\tau_k - \sigma_k)|_{g_k} < \delta, j = 0, ..., r+h$ *(σ_k es C^{r+h}-A.H.(δ)).*
(2) *$j_G^r \sigma_k$ es η-transversal a $\mathcal{S}^G$ a lo largo de Q (de las direcciones de TQ en los puntos de Q).*

La consecuencia de este corolario es obvia. Si partimos de (M, w) con (Q, D) subvariedad (compacta) calibrada y G polarización J-compleja extendiendo a D (igualmente cuando lo que tenemos es una subvariedad simpléctica), suponemos que $\mathcal{S}^G$ proviene de una estratificación $\mathcal{S}^D$ de $\mathcal{J}_D^r E_k \to (Q, D)$ mediante la identificación $\mathcal{J}_D^r E_k \cong \mathcal{J}_G^r E_k$ en los puntos de Q. Es fácil ver que transversalidad estimada a $\mathcal{S}^G$ (que requiere el uso de la métrica inducida en Q) es comparable sobre Q a la definición dada de transversalidad estimada a $\mathcal{S}^G$. Por tanto, deducimos transversalidad estimada de $(j_G^r \tau_k)_{|Q}$ a $\mathcal{S}^G$. En ausencia de curvatura (por ejemplo cuando trabajamos con las proyectivizaciones) o cuando $r = 0$ –que son las circustancias que se darán para todas las aplicaciones que vamos a enunciar– hay una identificación aproximada entre $(j_G^r \tau_k)_{|Q}$ y $j_D^r(\tau_{k|Q})$, lo que implica transversalidad de la última sucesión y que es el objetivo final de la teoría relativa: construir sucesiones A.H. de secciones cuya restricción a la subvariedad tenga buenas propiedades de transversalidad (y posiblemente también la propia sucesión dentro de M).

6.1. Prueba del teorema principal

La prueba sigue las mismas líneas que la dada por D. Auroux en [4] para el caso par, aunque con ciertas complicaciones técnicas que discutimos a continuación.

Definición 6.4. *Una familia de propiedades $\mathcal{P}_k(\eta, x)_{x \in M, \eta > 0, k >> 0}$ de secciones de E_k se denomina local C^{r+1}-abierta si dada una sucesión τ_k C^{r+h}-A.H. cumpliendo $\mathcal{P}(\eta, x)$ (h dependerá de la propiedad $\mathcal{P}$), para cualquier sucesión de secciones C^{r+h}-A.H. χ_k tal que $|\nabla_D^j(\tau_k - \chi_k)|_{g_k} \leq \epsilon$, $j = 0, ..., r+1$, χ_k satisface $\mathcal{P}(\eta - L\epsilon, x)$ para k mayor que un cierto $K(C^R)$, con $L > 0$ independiente de η, ϵ, x y de las sucesiones de secciones.*

Es importante hacer notar que en la definición anterior solamente las derivadas a lo largo de D son tenidas en cuenta.

Fijemos una sucesión de estratos S_k^b de $\mathcal{J}_D^r E_k$. Una sección τ_k satisface $\mathcal{P}_k(\eta, x)$ si o bien $j_D^r \tau_k(x)$ se encuentra a distancia de ∂S_k^b menor que $N_1 \eta$

y en caso de que corte al estrato lo hace con $\angle_m(T_D S_k^b, T_D\tau_k) \geq \eta$, o bien se encuentra a distancia de ∂S_k^b mayor que $N_2\eta$ y es η transversal a S_k^b. Los coeficientes $N_1 > N_2 > 0$ son constantes (probablemente muy grandes) *dependientes de* η. El coeficiente N_1 aparece porque en puntos cuya distancia al borde del estrato es próxima a $N_1\eta$, el radio de la bola donde la descripción local de la estratificación dada en la definición 5.2 es válida, es al menos η. Por el contrario N_2 puede ser elegido mayor que $N_1 - 1$ y simplemente nos permite tener una región de solapamiento para las dos nociones de transversalidad. También η tiene que ser suficientemente pequeño en relación a las constantes (C^D, C) de τ_k.

Definimos transversalidad uniforme con respecto a una sucesión de estratos S_k^b como la existencia de un cierto $\eta > 0$ tal que $\mathcal{P}_k(x,\eta)$ se cumple para todo x y $k >> 0$ (simplemente hemos añadido la noción de transversalidad uniforme para puntos cercanos a la frontera del estrato). Si se prueba que $\mathcal{P}_k(x,\eta)$ –tal y como la acabamos de definir para una sucesión de estratos S_k^b de una estratificación– es una propiedad local C^{r+1}-abierta (o simplemente abierta), al llevar a cabo perturbaciones cuyo tamaño (en las direcciones de D) sea una fracción de η mantendremos, digamos, $\frac{\eta}{2}$-transversalidad con respecto a S_k^b en todos los puntos de M para la nueva sucesión.

Reordenamos los estratos de la S_k tal que para cualquier b, $\partial S_k^b \subset \cup_{a<b} S_k^a$. Para probar que $\mathcal{P}_k(x,\eta)$ con respecto a S_k^b es una propiedad abierta es necesario suponer que $\mathcal{P}_k(x,\alpha)$ se cumple para todos los estratos precedentes, donde α es un múltiplo apropiado de η. Necesitamos asumir esta propiedad para poder tratar el caso de los puntos cercanos a la frontera.

Es importante también hacer notar que una vez se supone la transversalidad con respecto a los estratos de índices precedentes, las construcciones (esencialmente la cantidad de transversalidad que vamos a obtener) dependerá de las constantes C de τ_k (en realidad dependen del tamaño de la primera derivada covariante de $j_D^r\tau_k$ cuya cota se deduce de C_{r+2}). Como hemos mencionado, cuando logramos transversalidad estimada a una sucesión de estratos la cota $\tilde{C}_j$ nos será imposible de determinar. Si el número de estratos es mayor que dos, habremos de repetir la construcción para las nuevas secciones; al depender la cantidad de transversalidad que lograremos de $\tilde{C}_{r+2}$, tampoco podremos acotarla por debajo (veremos que la excepción se da para 0-jets).

Lema 6.5. *Sea τ_k una sucesión $C^{\geq r+h}$-A.H.(C^D) para la que $\mathcal{P}(x,\alpha)$ se cumple con respecto a los estratos precedentes a S_k^b y en todos los puntos de M ($h \geq 2$). Entonces si η es suficientemente pequeño (dependiendo también de C_{r+2}) y ϵ es de nuevo pequeño comparado con η, $\mathcal{P}_k(x,\eta)$ de τ_k con respecto a S_k^b es una propiedad local C^{r+1}-abierta.*

PRUEBA. Nótese que para la prueba necesitamos suponer que la propiedad que perseguimos se cumple para los estratos precedentes. Esto no supone una contradicción porque al menos el primer estrato no tiene frontera con lo que podemos comenzar la inducción.

Asumamos que τ_k satisface $\mathcal{P}(\eta, x)$ (con respecto a S_k^b). Si χ_k es otra sucesión de secciones C^{r+1}-A.H.(ϵ, C_{r+1}), entonces para k suficientemente grande $|j_D^r\chi_k| < B_1\epsilon$ y $|\nabla_D j_D^r\chi_k| < B_1\epsilon$ (B_1 tan próximo como queramos a 1).

Eligiendo L suficientemente grande es posible encontrar nuevas constantes $N_1^\epsilon, N_2^\epsilon$ tal que si $y = j_D^r(\tau_k + \chi_k)(x)$ está a distancia de la frontera mayor que $N_2^\epsilon(\eta - L\epsilon)$, la distancia a la frontera de $q = j_D^r\tau_k(x)$ es mayor que $N_2\eta$ (la distancia en el espacio total de $\mathcal{J}_D^r E_k$ es comparable a la distancia respecto a la métrica hermitiana a lo largo de las fibras). También si la distancia para y es menor que $N_1^\epsilon(\eta - L\epsilon)$, la correspondiente para q es menor que $N_1\eta$.

Tratemos en primer lugar el caso en que y, q están lejos de la frontera. Podemos suponer que tanto y como q (y los correspondientes subespacios vectoriales $T_D j_D^r(\tau_k + \chi_k)(x)$ y $T_D j_D^r\tau_k(x)$) están en el dominio de una carta 1-comparable, producto de una carta coordenada aproximadamente holomorfa por una bola en la fibra; usamos la métrica euclídea $\hat{g}_0$ y su transporte paralelo pues en esta carta es comparable al de la métrica $\hat{g_k}$. Para ϵ una fracción de η suficientemente pequeña y k suficientemente grande, $\angle_M(T_D j_D^r(\tau_k + \chi_k)(x), T_D j_D^r\tau_k(x)) \leq B_2\epsilon$, donde B_2 no depende de k, x. El motivo es que el espacio tangente al grafo de cada sección (a lo largo de D) coincide de modo aproximado con el $(r+1)$-jet, y la diferencia usando ∇_D es comparable a la obtenida usando d_D. Igualmente el $\hat{g}_k$-transporte paralelo de $T^{||}S_k^b(y)$ a lo largo del segmento en la fibra que une y con q, difiere de él mismo (usando métrica y transporte paralelo euclídeo para medir) en una cantidad proporcional a la distancia. Si esta variación es suficientemente pequeña comparada con $\angle_m(T^{||}S_k^b, \hat{D})$, ocurre lo propio con $T_D^{||}S_k^b(y)$ y $T_D^{||}S_k^b(q)$. Por tanto, para ϵ suficientemente pequeño comparado con η, inferimos $\mathcal{P}(\eta - L\epsilon, x)$ para χ_k. Observamos que para un η de partida suficientemente pequeño la constante κ_1 tal que se puede tomar $\epsilon = \kappa_1\eta$ no depende de η (ni de las cotas de la sección pues de nuevo hacemos tender la parte antiholomofa a cero incrementando k adecuadamente).

La segunda posibilidad es que q se encuentre a distancia de la frontera inferior a $N_1\eta$. Veremos que si esta cantidad está elegida adecuadamente, un punto $p \in S_k^a$, $a < b$, a distancia de q menor de la citada nunca podrá no pertenecer aproximadamente a $\Theta_{S_k^a}$. Por tanto podremos aplicar la condición de Whitney.

Si τ_k es una sección C^{h+r}-A.H.(C^D, C), para cualquier $x \in M$ y $q = j_D^r\tau_k(x)$, existen constantes positivas ρ_1, ρ_2 tal que $j_D^r\tau_k(B_{g_k}(x, \rho_1)) \subset B_{\hat{g}_k}(q, \rho_2)$ (recordamos que $j_D^r\tau_k$ es C^h-A.H.$(\bar{C}^D, \bar{C})$); la elección de constantes depende de $\bar{C}$.

Sea $p \in B_{\hat{g}_k}(q, \rho_2)$ y sea su proyección sobre M el punto x'. Llamemos $p - q' = j_D^r\tau_k(x')$. Existen unos coeficientes únicos β_I tal que $q' = \beta_I\nu_{k,x,I}$. Por la linealidad de los jets $j_D^r(\tau_k + \beta_I\tau_{k,x,I}^{\mathrm{ref}})(x') = p$. Escogemos ρ_2 de modo que el tamaño de estos coeficientes sea una pequeña fracción de la cantidad de transversalidad α de $j_D^r\tau_k$ en x. Queremos demostrar que α-transversalidad de $j_D^r\tau_k$ en q (la imagen de x) implica $\alpha - B_3 d_{\hat{g}_k}(p, q)$ transversalidad de $j_D^r(\tau_k + \beta_I\tau_{k,x,I}^{\mathrm{ref}})$ en p (la imagen de x'), lo que contradiría, para una elección de ρ_2 adecuada, la no pertenencia aproximada de p a $\Theta_{S_k^a}$. Simplemente observamos que tenemos que demostrar una relación similar para la variación de $T_D^{||}S_k^a(q)$ a $T_D^{||}S_k^a(p)$ y la de $T_D j_D^r \tau_k(x)$ a $T_D j_D^r(\tau_k + \beta_I \tau_{k,x,I}^{\text{ref}})(x')$ (medida por ejemplo en las cartas producto anteriormente citadas con métrica euclídea y su transporte paralelo). La primera relación ya está probada; en cuanto a la segunda, usamos la desigualdad triangular comparando primero $T_D j_D^r \tau_k(x)$ con $T_D j_D^r \tau_k(x')$, y luego éste ultimo con $T_D j_D^r(\tau_k + \beta_I \tau_{k,x,I}^{\text{ref}})(x')$. Esta última comparación se sigue del tamaño de los coeficientes β (es la misma situación que ya hemos probado para puntos lejanos a la frontera del estrato); para la primera usamos la cota en $\nabla\nabla_D j_D^r \tau_k$ que controla la variación de $T_D j_D^r \tau_k$ (de modo aproximado, pues D es no integrable).

Se elige $N_1\eta$ menor que ρ_2. En particular el punto p está lejos de la frontera de $S_k^a \subset \partial S_k^b$, es decir, pertenece a la región de S_k^a donde la condición de Whitney se cumple. En esta situación existe un $\rho > 0$ tal que para cualquier $y \in B_{\hat{g}_k}(p,r) \cap S_k^b$, $\angle_M(T^{||}S_k^a(y), TS_k^b(y)) \leq B_4\rho$, donde tanto ρ como B_4 no dependen ni de k ni de y. Las cantidades $\angle_m(\hat{D}, T^{||}S_k^a), \angle_m(\hat{D}, T^{||}S_k^b)$ están acotadas inferiormente. Esto supone que $\angle_M(T_D^{||}S_k^a(q), T_D S_k^b(q)) \leq B_5\rho$, y por tanto la existencia de una pequeña constante $\kappa_2 > 0$ tal que para todo $\alpha > 0$ suficientemente pequeño, α-transversalidad de $j_D^r \tau_k$ a S_k^a implica $\frac{\alpha}{2}$-transversalidad a S_k^b en el entorno de radio $\rho\kappa_2$.

De nuevo imponemos que $N_1\eta$ sea a lo sumo un medio de $\min(\rho_2, \rho\kappa_2)$ y esto concluye la prueba. $\square$

Observación 6.6: Nótese que en el proceso de inducción la cantidad de transversalidad obtenida en los puntos cercanos a la frontera no se usa para nada; ahí, la constante C_{r+2} es importante a la hora de elegir el tamaño del entorno de ∂S_k^b donde se deduce $\frac{\alpha}{2}$-transversalidad por la condición de Whitney.

Para probar el teorema 6.2, se define la propiedad $\mathcal{P}(x,\eta)$ para la sucesión C^{r+h}-A.H.(C) τ_k como η-transversalidad en x a S_k^b de $j_G^r \tau_k$ a lo largo de Q. Se prueba de modo similar que esta es una propiedad local C^{r+1}-abierta (la definición usa toda la derivada ∇ en vez de la ∇_D de las variedades impares). Simplemente hay que asegurarse de que $|\nabla^{r+1}\chi_k|_{g_k} \leq \epsilon$, implica $|\nabla_Q j_G^r \chi_k|_{g_k} \leq L\epsilon$, y que $|\nabla^{r+2}\tau_k|_{g_k} \leq C$ da lugar a una cota uniforme para $|\nabla\nabla_Q \tau_k|$. Ya hemos visto que de una C^{r+h}-cota C, se pasa a una C^h-cota $\bar{C} = B'C$ para $j_G^r \tau_k$; por tanto la primera cuestión es obvia y la segunda se consigue usando una familia de cartas adaptadas a $TQ \times TQ^\perp$ en los puntos de Q. Igualmente notamos que si $x \in Q$ y $j_G^r \chi_k(x)$ corta a S_k^a a lo largo de TQ con ángulo acotado por debajo, entonces pertenece al subconjunto holónomo transversal $\Theta_{S_k^a}$. Con estas puntualizaciones el argumento anterior funciona para Q.

Elijamos ahora una constante c_1 tal que para cualesquiera $x, x' \in M$ con $d_k(x,x') \leq c_1$ se tenga $d_{\hat{g}_k}(\tau_k(x), \tau_k(x')) \leq \frac{\eta}{2}$. La constante dependerá de (C^D, C_{r+2}). Definimos los "puntos buenos" para τ_k, $\mathcal{B}_k^\tau$, como el conjunto de puntos $x \in M$ tal que $\tau_k(x)$ está a distancia menor que 2η de los puntos de S_k^b que se encuentran a distancia de ∂S_k^b mayor que $N_2\eta$. La propiedad interesante es que si $x \in \mathcal{B}_k^\tau$, entonces $B_{g_k}(x, c_1)$ está en una región donde las funciones de la definición 5.2 están disponibles. También, para una perturbación χ_k de tamaño (a lo largo de D) menor que $\frac{\eta}{2}$, la imagen de $B_{g_k}(x, c_1)$ mediante $j^r_D(\tau_k + \chi_k)$ permanece en dicha región. Si $x \notin \mathcal{B}^\tau_k$, tanto $j^r_D\tau_k$ como $j^r_D(\tau_k + \chi_k)$ envían la bola $B_{g_k}(x, c_1)$ fuera del conjunto de puntos a distancia de $S^b_k \cap B_{\hat{g}_k}(\partial S^b_k, N_2\eta)$ mayor que η. Resumiendo, si $x \notin \mathcal{B}^\tau_k$ y χ_k es de tamaño ϵ menor que $\frac{\eta}{2}$, se verifica $\mathcal{P}_k(x', \eta - L\epsilon)$ para $\tau_k + \chi_k$ con respecto a S^b_k en todos los puntos $x' \in B_{g_k}(x, c_1)$. Por tanto, sólo tendremos que trabajar para lograr transversalidad en los puntos de $\mathcal{B}^\tau_k$.

En el caso relativo podemos encontrar igualmente una constante c_1 con propiedades similares y centrarnos en el correspondiente conjunto de puntos buenos $\mathcal{B}^\tau_k$, que será en los únicos en los que tendremos que perturbar para lograr transversalidad estimada.

Proposición 6.7. *Sea $\mathcal{P}(\eta, x)_{x\in M,\eta>0,k>>0}$ una familia de propiedades locales C^{r+1}-abiertas de secciones de E_k. Asumamos que existen constantes positivas $c, c', c,'' e$, tal que para cualquier $\delta > 0$ y ξ_k sucesión de secciones $C^{\geq r+h}$-A.H.(C^D) de E_k ($h \geq 2$), se pueden encontrar para cualquier $x \in M$ secciones $\chi_{k,x}$ $C^{\geq r+h}$-A.H. con las siguientes propiedades para $k >> 0$:*

(1) *$\chi_{k,x}$ es $C^{\geq r+h}$-A.H.($c''\delta$).*
(2) *Las secciones $\frac{1}{\delta}\chi_{k,x}$ tienen decaimiento gaussiano con respecto a x con cotas para todas las derivadas, de modo que la que controla las direcciones de D hasta orden $r + h$ sólo depende de la geometría de la variedad (en particular no depende de la sucesión ξ_k).*
(3) *$\xi_k + \chi_{k,x}$ satisface la propiedad $\mathcal{P}(\gamma, y)$ para todo $y \in B_{g_k}(x, c)$ con $\gamma = c' log(\delta^{-1})^{-e}$.*

Entonces dado cualquier $\alpha > 0$ y cualquier sucesión τ_k de secciones $C^{\geq r+h}$-A.H. de E_k, existe una sucesión σ_k de secciones $C^{\geq r+h}$-A.H. tal que para k suficientemente grande $\tau_k - \sigma_k$ es $C^{\geq r+h}$-A.H.(α), y las secciones σ_k verifican la propiedad $\mathcal{P}(\eta, x)$, para un cierto η uniforme, y para todo $x \in M$.

PRUEBA. Véase por ejemplo [**50**]. □

En la proposición anterior la constante c es uniforme y puede ser elegida tan pequeña como queramos; para nuestra sucesión τ_k imponemos que c sea menor que ρ_1. Para cualquier punto $x \notin \mathcal{B}^\tau_k$ seleccionamos como perturbación la sección cero. Así pues, la prueba del teorema 6.1 (resp. 6.2) se reduce a mostrar la existencia de las perturbaciones χ_k para los puntos en $\mathcal{B}^\tau_k$, para cualquier sucesión ξ_k que sea $C^{\geq r+h}$-A.H. (resp. C^{r+h}-A.H.).

La perturbación local. (Continuación de la prueba del teorema principal). Sea x un punto en $\mathcal{B}^\tau_k$ y ξ_k una sucesión de secciones C^{r+h}-A.H($\tilde{C}^D$) verificando $|\nabla^j_D j^r_D\tau_k - \nabla^j_D j^r_D\xi_k|_{g_k} \leq \delta$, $j = 0, ..., h$, donde $\delta < \frac{\eta}{2}$. De ello se deduce que $j^r_D\xi_k(B_{g_k}(x, c_1))$ se encuentra en la región donde se tiene la descripción local de la estratificación de la definición 5.2. Por la condición (3) en dicha definición, la función $F = (f_1 \circ j^r_D\xi_k, ..., f_p \circ j^r_D\xi_k)$ es $C^{\geq h}$-A.H.($C_{1,\eta}\tilde{C}^D$), con $C_{1,\eta}$ una constante uniforme. Por el lema 5.9 y para $\gamma > 0$ suficientemente pequeña, γ-transversalidad de F es equivalente a $A\gamma$-transversalidad de $j^r_D\xi_k$, donde A es una constante uniforme. Si se elige c_1 suficientemente pequeña, la bola $B_{g_k}(x,c_1)$ estará en el dominio de coordenadas aproximadamente holomorfas, donde disponemos de la base local $j^r_D\tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I}$ del fibrado de r-jets; trataremos de perturbar usando elementos de esta base que generan las direcciones complementarias al estrato.

Reescalando las secciones, podemos asumir que $|\tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I}|_{C^{r+h}} \leq \frac{1}{\delta}$. Siendo más precisos es importante observar que la función a perturbar es F, y por tanto lo haremos usando una base adecuada de secciones A.H. de $\mathbb{C}^p$, que es el espacio de llegada de esta función. Para cada I, la función $\Theta_I = (df_1(j^r_D\xi_k)j^r_D\tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I}, ..., df_p(j^r_D\xi_k)j^r_D\tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I})$ con valores en $\mathbb{C}^p$ es $C^{\geq h}$-A.H.$(C_{2,\gamma}\bar{C}^D)$, para una cierta constante uniforme $C_{2,\gamma}$. Usando la condición (1) de 5.2, y tal vez haciendo c_1 más pequeño, se concluye la existencia de números complejos $\lambda_{I,i}$, $i = 1,...,p$, $\sum_I |\lambda_{I,i}| < 1$, de modo que para las funciones $\Theta_i = \Theta_I$ se tiene que $|\Theta_1(x) \wedge \cdots \wedge \Theta_p(x)|$ es comparable a una base unitaria de $\mathbb{C}^p$ (porque los correspondientes r-jets son comparables a una base unitaria del ortogonal a $\ker df$). En esta base $F = \mu_1\Theta_1 + \cdots \mu_p\Theta_p$, donde las propiedades de F y de las Θ_i implican que $\mu = (\mu_1, ..., \mu_p)$ es $C^{\geq h}$-A.H. sobre esa bola (una función $C^{\geq h}$-A.H. con valores en $\mathbb{C}^p$ en función de una base A.H. tiene coordenadas $C^{\geq h}$-A.H.). Se definen las perturbaciones correspondientes $\zeta_{k,x,i} = \sum_I \lambda_{I,i}\tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I}$, que son secciones de E_k.

Si fuera necesario se reescala un entorno de x para que la imagen de $B_{g_k}(x,c_1)$ en la carta adaptada a la métrica contenga a $B^+ \times [0,1]$, donde $B^+ \subset \mathbb{C}^n$ es la bola euclídea de radio 1. Fijamos también un $c < c_1$ tal que la imagen de $B_{g_k}(x,c)$ está contenida en $B_{1/2} \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, la bola euclídea en $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ de radio $\frac{1}{2}$. Hacemos pullback de μ a la carta para obtener una función $\tilde{\mu}\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^p$, a la que podemos aplicar el resultado de transversalidad local que extiende al de S. Donaldson para funciones A.H. de $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{C}^p$, cuya prueba posponemos hasta el final de la sección.

Proposición 6.8. *Sea $F\colon B^+ \times [0,1] \to \mathbb{C}^p$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$ una constante y $\sigma = \delta(log(\delta^{-1})^{-e}$, donde e es un entero fijo adecuado dependiendo sólo de las dimensiones n,p. Asumamos que para cada $s \in [0,1]$, F_s satisface las siguientes estimaciones en B^+:*

$$|F_s| \leq 1,\ |\bar{\partial}F_s| \leq \sigma,\ |\nabla\bar{\partial}F_s| \leq \sigma$$

Entonces existe una curva diferenciable $w\colon [0,1] \to \mathbb{C}^p$ tal que $|w| < \delta$ y la función $F - w$ es σ-transversal a $\mathbf{0}$ sobre $B_{1/2}$ a lo largo de las direcciones de $\mathbb{C}^n$. Es más, si $|\nabla^j\partial F/\partial s| < C_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, se puede escoger w de modo que $|d^jw/ds^j| < \Phi_j(\delta)$, para todo $j \in \mathbb{N}$ y $d^jw/ds^j(0) = 0$ y $d^jw/ds^j(1) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, donde Φ_j es una función que sólo depende de las dimensiones n,p.

En la proposición 6.8 las normas se computan respecto a la métrica euclídea, la derivada covariante es la asociada a ésta (es decir, derivadas parciales usuales), y la estructura casi-compleja es J_0.

Podemos aplicar esta proposición una vez que k sea suficientemente grande (y posiblemente después de reescalar), pues por ejemplo usando los resultados del lema 3.27 sabemos que la holomorfía aproximada de la función equivale a la holomorfía aproximada de la misma pero usando los elementos planos de la carta adaptada, es decir, D_h, J_0, g_0 (y las cotas, al menos para órdenes finitos, son proporcionales si k se escoge suficientemente grande).

En consecuencia podemos encontrar una curva en $\mathbb{C}^p$, $(w_1, ..., w_p)$, tal que $\tilde{\mu} - w$ sea γ-transversal a $\mathbf{0}$ sobre $B_{1/2}$. Esto supone la $A_1\gamma$ transversalidad de $\mu - w$ a $\mathbf{0}$ sobre $B_{g_k}(x, c_1)$, para un A_1 uniforme, y por tanto que $F - w_1\Theta_1 - \cdots - w_p\Theta_p$ es $A_2\gamma$-transversal a $\mathbf{0}$ sobre la misma bola.

Es importante resaltar que hemos obtenido es una solución para el problema de transversalidad en el fibrado de r-jets, pero lo que buscamos es una solución al problema de transversalidad fuerte, esto es, una perturbación que sea el r-jet de una sucesión de secciones de E_k. El candidato natural es la sucesión

$$\chi_{k,x} = -(w_1\zeta_{k,x,1} + \cdots + w_p\zeta_{k,x,p}).$$

Es evidente que $\chi_{k,x}$ es una sucesión A.H. con decaimiento gaussiano con respecto a x. Para probar que hasta orden $r + h$ las constantes gobernando las derivadas y el decaimiento gaussiano a lo largo de D son comparables a δ, es necesario que las derivadas en esas direcciones de las funciones w sean nulas o nulas en el sentido aproximado. Por construcción, y a diferencia del caso par en el que estas funciones son constantes, estas derivadas no se anulan. En las correspondientes coordenadas A.H. son constantes a lo largo de D_h. Como *tenemos cotas uniformes en las componentes verticales* podemos concluir que las derivadas a lo largo de D son aproximadamente nulas. La sutileza radica en que si hubiésemos trabajado con sucesiones C^{r+h}, habríamos podido inferir cotas uniformes para las derivadas de w hasta orden h; pero para continuar el proceso inductivo necesitamos control de orden $r + h$ (de orden h para los r-jets). Este es el motivo preciso para haber introducido las sucesiones $C^{\geq r+h}$.

En lo relativo a la transversalidad si llamamos

$$\tilde{F} = (f_1 \circ j^r_D(\xi_k + \chi_k), ..., f_p \circ j^r_D(\xi_k + \chi_k)),$$

es suficiente una cota para $|\nabla^j_D(\tilde{h} - (h - w_1\Theta_1 - \cdots - w_p\Theta_p)|_{g_k}$, $j = 0, 1$, de tamaño $A_2\frac{\gamma}{2}$ para obtener $A_2\frac{\gamma}{2}$-transversalidad para $\xi_k + \chi_k$. Nótese que la diferencia entre ambas funciones proviene del hecho de que cuando componemos con f y perturbamos linealmente, la correspondiente perturbación no es lineal en las fibras de $\mathcal{J}^r_D E_k$. En otras palabras, en cartas con la foliación $\ker df$ rectificada las fibras de $\mathcal{J}^r_D E_k$ no son espacios vectoriales. En cualquier caso, la falta de linealidad está controlada por la segunda derivada de f. Siendo más precisos,

$$\tilde{F} = F - w_1\Theta_1 - \cdots - w_p\Theta_p + O(c_k^{-1/2}) + O((\delta + c_k^{-1/2})^2),$$

por las cotas en las segundas derivadas de las f_i y por el hecho de que $j^r_D\sigma_{k,x} - (w_1\Theta_1 + \cdots + w_p\Theta_p)$ es de tamaño $O(c_k^{-1/2})$. La observación importante es que no sólo obtenemos C^0-control de tamaño $O(c_k^{-1/2}) + O((\delta + c_k^{-1/2})^2)$, sino también para las derivadas a lo largo de D. Debido a la fórmula de γ en función de δ, si δ es suficientemente pequeño este último término de orden cuadrático en δ es mucho más pequeño que $A_2\gamma$. El resultado es

$A_3\gamma$-transversalidad para $\tilde{F}$ sobre $B_{g_k}(x,c)$, lo que equivale a $A_4\gamma$- transversalidad de $j^r_D\tilde{\tau}_k$ a S^a_k sobre la citada bola. Por tanto, $\xi_k + \chi_k$ satisface $\mathcal{P}(A_4\delta\log(\delta^{-1})^{-e}), y)$ para todo $y \in B_{g_k}(x,c)$, y esto completa la prueba del teorema 6.1. □

La prueba del teorema 6.2 es la misma pero con dos modificaciones. La primera es que podemos generar las direcciones complementarias a la distribución $\ker df$ usando los r-jets a lo largo de G, ya que el estrato es por hipótesis el pullback de una subvariedad de $\mathcal{J}^r_G E_k$ mediante la proyección ortogonal $\mathcal{J}^r E_k \to \mathcal{J}^r_G E_k$. La segunda es el resultado de J. P. Mohsen de transversalidad local relativa a una subvariedad Q (ver la sección 5 de [**43**]). Como en dicho resultado la perturbación es una combinación lineal de las secciones $\tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,I_g}$ podemos usar secciones C^{r+h}-A.H. Además, la cantidad final de transversalidad sólo dependerá de la geometría de la variedad y la estratificación y de la cota controlando las derivadas de orden menor o igual que $r+h$.

Demostración del teorema de transversalidad local. (Proposición 6.8). La prueba es una modificación menor de la proposición 5.1 en [**50**], que a su vez es una extensión de la demostración del lema 11 en [**32**], que de nuevo es una pequeña generalización de la proposición 3 en [**2**] y de la proposición 25 en [**12**].

Para la función $F_s\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ se define $U(F_s, w, \delta, \sigma)$ como la imagen en $B(0,\delta)$ de los puntos en $B' = B(0,\frac{1}{2}) \subset \mathbb{C}^n$ para los que $F_s - w_s$ es σ-transversal a cero (aquí nos referimos a transversalidad de F_s en todas las direcciones, que son las de D_h).

El punto clave es demostrar que $U(F_s, w, \delta, \sigma)$ contiene al complementario de un conjunto W que es unión de un determinado número de bolas de radio σ mayorado por $N(\delta)$. Asumiendo dicho resultado, para un par de puntos x, y en el complementario se considera una curva definida del modo siguiente: el segmento $[x,y]$ corta a ∂W en a lo sumo $2N$ puntos. Los trozos de segmento en el interior de W son reemplazados por curvas diferenciables a trozos, resultado de empalmar geodésicas en las porciones de esferas que conforman dicha frontera. Por último perturbamos adecuadamente la curva w_0 a otra w_1 diferenciable.

La prueba de que es posible encontrar una curva w_1 con su derivadas de orden i acotadas en términos de una función $\Phi_i(\delta)$ es como sigue: cada pedazo diferenciable de w_0 es o bien un segmento o bien un trozo de geodésica en la correspondiente esfera. Luego todas las derivadas de cada uno están acotadas en términos de σ, y por tanto de δ, siempre que tengan longitud acotada inferiormente por una fracción de δ. Para hacer la función diferenciable multiplicaremos por una función de corte en cada unión. La función de corte será fija, y tan solo variará por el reescalamiento elegido. Si podemos utilizar en ambos lados de la unión un trozo de curva con longitud acotada inferiormente por una fracción de σ, habremos probado el resultado deseado.

Lo único que necesitamos hacer es tomar las bolas que conforman W con un poco de cuidado. En realidad tomaremos un recubrimiento de la bola de radio δ por bolas de radio σ. Tal y como hemos venido haciendo hasta ahora, dado que buscamos ciertas constantes uniformes en δ y σ tomaremos el recubrimiento para $\sigma = 1$ y luego reescalaremos.

Para este valor de σ consideramos el recubrimiento por bolas de un cierto radio ρ centradas en los puntos de la retícula entera. El radio ρ se elige de modo que:

(1) $\rho > \frac{\sqrt{2p}}{2}$, con lo que obtenemos un recubrimiento.
(2) Las intersecciones de las esferas siempre ocurren en posición general.

Recubriremos $\mathbb{C}^p$ para que al contraer la construcción multiplicando por un σ arbitrario todavía obtengamos un recubrimiento de la bola de radio δ. Aunque tengamos un número infinito de bolas la invariancia por traslaciones implica que la condición de tener intersecciones en posición general tiene que ser comprobada tan sólo en un número finito de ellas, de lo que se desprende la existencia de ρ con las propiedades requeridas. La propiedad que es importante para nosotros es que la esfera S^{n-1}, frontera de cada bola, queda dividida en regiones con la siguiente propiedad: cada región R tiene su frontera ∂R estratificada con estratos de dimensión máxima ∂R_i. Para cada $r > 0$ definimos $\partial R_{i,r}$ como los puntos en ∂R_i a distancia de su frontera mayor que r (la unión de la frontera es la unión del resto de los estratos). Es posible encontrar un r_0 tal que para cualesquiera puntos $x \in \partial R_{i,r_0}$, $y \in \partial R_{j,r_0}, i \neq j$, podemos encontrar una geodésica a trozos cuya longitud total está acotada superiormente y la de cada trozo diferenciable inferiormente. De nuevo esto es una consecuencia de que basta comprobar la afirmación para un número finito de bolas del recubrimiento.

Dados δ y σ arbitrarios, reescalamos la construcción de modo que ρ se convierte en σ y nos quedamos con las bolas intersecando la bola de radio δ. W se define como la unión de las bolas que intersecan al complementario de la imagen de $U(F_s, w, \delta, \sigma)$. Por los resultados por ejemplo del lema 11 en [**32**], sabemos que el número de bolas de W está acotado por un cierto $N(\delta)$. Comprobamos que dos puntos en ∂W pueden ser unidos por una curva hecha de trozos de geodésicas, de modo que el número de trozos está acotado por un múltiplo del número de bolas N, y cada trozo tiene longitud acotada inferiormente por $b\sigma$, con b independiente de σ. Si el punto inicial o final están demasiado cerca de la frontera de la correspondiente región de la esfera podemos alejarnos de ésta lo suficiente y luego volver, para lo que basta con incrementar el número $N(\delta)$ que acota el número de "trozos diferenciables" de la curva a $N+2$. En cuanto a los segmentos, aquellos que no son ni el inicial ni el final, si conectan bolas con intersección luego su distancia está acotada por debajo por un múltiplo de σ; si no, lo cambiamos por un segmento que va del punto inicia al centro de la bola (que contiene al segmento y no está en W) y otro del centro al punto final. Para los segmentos inicial y final nos alejamos hacia el centro de la bola si los puntos están demasiado cerca de ∂W y volvemos mediante otro segmento al punto de intersección con ∂W.

Simplemente recordamos que la curva final w se construye tomando cortes $\mathbb{C}^n \times \{s\} \subset \mathbb{C}^n \times [0, 1]$, construyendo ahí curvas w_q como las descritas y conectando con segmentos verticales. Como la longitud de dichos segmentos está acotada inferiormente adecuadamente, la perturbación anterior usando funciones de cortes en las uniones da una curva w con las cotas requeridas. □

7. Aplicaciones

Pasamos a probar los resultados enunciados en la introducción.

PRUEBA DEL TEOREMA 1.5. Consideramos una situación un poco más general que la del enunciado del teorema 1.5. Partimos de $E_k \to (M, D, J, g)$ una sucesión muy amplia de fibrados hermitianos localmente escindibles de rango m. Nótese que para una variedad calibrada de tipo entero una sucesión tal sería por ejemplo $\mathbb{C}^m \otimes L^{\otimes k}$.

Dado un punto cualquiera x, la construcción de una subvariedad pasando por x y de codimensión real $2m$ es como sigue (véase [**38**]). Es necesario seleccionar secciones de referencia "adaptadas a x". Como queremos que la subvariedad pase por x, en coordenadas adaptadas a la métrica podemos tomar las secciones $z_k^j \tau_{k,x,j}^{\text{ref}}$, $j = 1, ..., m \leq n$ y considerar su suma directa, que será una sección de E_k. Esta sucesión de secciones A.H. se anula en x y es uniformemente transversal en una bola de g_k-radio fijo centrada en x. En el proceso de globalización empezamos por estas bolas y no aplicamos perturbación alguna. La cuestión es no alterar lo que ocurre en x al perturbar en otros puntos. Nos interesan esencialmente aquellos a distancia menor que $O(c_k^{1/6})$ pues este es el tamaño del soporte de nuestras secciones de referencia. Si y es un punto de éstos, multiplicamos las secciones de referencia $\tau_{k,y,j}^{\text{ref}}$ por una función $h_{y,x}$ que sea J-compleja en y, se anule en x, esté acotada por debajo en una bola centrada en y de g_k-radio fijo y tenga sus derivadas acotadas por arriba. De este modo, al multiplicarla por la sección de referencia seguimos teniendo una sección A.H. con decaimiento gaussiano con respecto a y y que localiza nuestro problema en una bola de g_k-radio fijo. Siempre que la distancia entre x e y esté acotada inferiormente, la elección de $h_{y,x}$ con las citadas propiedades es posible. Esto lo podemos lograr pues sólo tenemos que perturbar en puntos a una determinada g_k-distancia de x (pues en una pequeña g_k-bola de radio $O(1)$ la elección inicial de secciones nos da transversalidad uniforme).

Por tanto, es posible encontrar una sucesión de secciones A.H. τ_k de E_k uniformemente transversales a $\mathbf{0}$ y anulándose en x (como estamos con 0-jets basta que la sucesión sea C^2-A.H.). Denotemos mediante W_k a las subvariedades $\tau_k^{-1}(\mathbf{0})$ (para k suficientemente grande son subvariedades), que son uniformemente transversales a D (corolario 5.12) y aproximadamente casi-complejas.

Para estudiar su topología procedemos como en el caso simpléctico y de contacto (véase [**12, 32**]).

Se considera la función $f_k = \log |\tau_k|^2 \colon M - W_k \to \mathbb{R}$, una función de Morse que nos dará una construcción por cirugía de M a partir de W_k.

Para finalizar la prueba del teorema basta con probar que efectivamente los puntos críticos de f_k son aislados (función de Morse), y su índice es mayor que $n-m$.

Es claro que f_k tiende a $-\infty$ cuando nos acercamos a W_k, y además si x es un punto crítico necesariamente $|\tau_k(x)| \geq \eta$, donde η es la cantidad de transversalidad uniforme.

En efecto, si el punto crítico tomase valor en el entorno tubular donde hay η-transversalidad, por ser $\nabla_D \tau_k$ sobreyectiva se podría encontrar un vector $v \in D$ de modo que $\nabla_v \tau_k(x) = \overline{\tau_k(x)}$.

Siendo

$$df_k = \frac{1}{|\tau_k|^2}(\langle \nabla\tau_k, \tau_k\rangle + \langle \tau_k, \nabla\tau_k\rangle),$$

la derivada $df_{k_v}(x)$ no se anularía contradiciendo la existencia de un punto crítico en x para f_k.

En particular podemos hacer una perturbación de τ_k de tamaño $O(c_k^{-1/2})$ fuera de un entorno de W_k de g_k-radio $O(1)$ (pues sabemos que son puntos regulares para f_k), de modo la nueva f_k es de Morse. Hacemos notar que la condición de Morse es automática para las direcciones de D, pero que en principio los puntos críticos de f_k podrían venir en familias uniparamétricas trasnversales a D.

Atendiendo a la ecuación anterior es evidente que

$$\partial f_k = \frac{1}{|\tau_k|^2}(\langle \partial\tau_k, \tau_k\rangle + \langle \tau_k, \bar\partial\tau_k\rangle). \tag{7.9}$$

Como en el punto crítico todas las componentes de la derivada se anulan, usando 7.9 se tiene la siguiente igualdad en x,

$$|\langle \partial\tau_k, \tau_k\rangle| = |\langle \tau_k, \bar\partial\tau_k\rangle|, \tag{7.10}$$

cuya importancia reside en el hecho de que conocemos el tamaño de la parte de la derecha.

Si derivamos 7.9 y evaluamos en x, se tiene:

$$\bar\partial\partial f_k = \frac{1}{|\tau_k|^2}(\langle \bar\partial\partial\tau_k, \tau_k\rangle - \langle \partial\tau_k, \partial\tau_k\rangle + \langle \bar\partial\tau_k, \bar\partial\tau_k\rangle + \langle \tau_k, \partial\bar\partial\tau_k\rangle). \tag{7.11}$$

Recordamos que seguimos usando la métrica g_k. Teniendo en cuenta la igualdad aproximada $\partial\bar\partial + \bar\partial\partial \approxeq F_D^{1,1}$ y las estimaciones para las partes antiholomorfas, podemos transformar 7.11 en

$$\bar\partial\partial f_k = \langle F_D^{1,1}\tau_k, \tau_k\rangle - \langle \partial\tau_k, \partial\tau_k\rangle + O(c_k^{-1/2}). \tag{7.12}$$

Como sabemos que la norma de τ_k está acotada inferiormente en el punto crítico, al ser $F_D^{1,1}$ la curvatura de un fibrado localmente escindible se tiene que para todo vector $u \in D$ de g_k-norma uniformemente acotada inferiormente, $\langle F_D^{1,1}(u, Ju)\tau_k, \tau_k\rangle = O(1)$.

Consideremos el subespacio H_x de D_x constituido por los vectores que son enviados por $\partial f_k(x)$ a la recta compleja en la fibra de E_k generada por τ_k. Claramente H_x es complejo y su dimensión real es al menos $2n-2m+2$.

Si $u \in H_x$,

$$|\tau_k||\partial_u \tau_k| = |\langle \partial_u \tau_k, \tau_k \rangle| = |\langle \tau_k, \bar{\partial} \tau_k \rangle|,$$

luego $|\partial_{|H_x} \tau_k| = O(c_k^{-1/2})$, y en consecuencia sobre este subespacio el término dominante del lado derecho de 7.12 es $\langle F_D^{1,1} \tau_k, \tau_k \rangle$.

Teniendo en cuenta que el Hessiano H_{f_k} restringido a D verifica $H_{f_k}(u) + H_{f_k}(Ju) = -2i\bar{\partial}\partial f_k(u, Ju)$, sobre H_x será necesariamente negativo.

Supongamos ahora que el índice del Hessiano fuese menor que $n-m-1$. Ello supondría la existencia de un subespacio $V \subset D_x$ de dimensión real al menos $n+m$ en el que H_{f_k} sería no negativo. Necesariamente $V \cap JV$ tendría dimensión al menos $2m$, pero esto contradiría el hecho de que sea negativo sobre H_x, pues la intersección $(V \cap JV) \cap H_x$ sería no nula.

Usando un argumento clásico de teoría de Morse se infieren los resultados relativos a los grupos de homotopía y homología.

□

Observación 7.1: Nótese que la perturbación que hemos hecho de τ_k para que f_k sea una función de Morse no afecta a sus ceros, lo cual quiere decir que los resultados topológicos son para la topología relativa de (M, W_k).

El siguiente teorema que queremos probar es el relativo a la existencia de variedades determinantales, que sigue siendo un problema de transversalidad para 0-jets (fibrados E_k), pero ya no con respecto a la sección $\mathbf{0}$ sino con respecto a una sucesión no trivial de estratificaciones A.H.

PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN 1.6. Al igual que en el caso anterior, podemos comenzar con $L_k \to (M, D, J, g)$ una sucesión de fibrados de línea muy amplia sobre una variedad casi-compleja. Si partimos de una variedad calibrada de tipo entero L_k será por ejemplo $L^{\otimes k}$, la sucesión de potencias del fibrado precuantizable.

Sean E, F fibrados hermitianos vectoriales con conexión y consideremos la sucesión $I_k := E^* \otimes F \otimes L_k$. En el espacio total de I_k consideramos la sucesión de estratificaciones S_k cuyos estratos son $S_k^i = \{A \in I_K |\ \mathrm{rk}(A) = i\}$, donde $A \in \mathrm{End}(E, F \otimes L_k)$ y $\mathrm{rk}(A)$ es su rango.

Aplicando el lema 5.14 se infiere que S_k^i es una sucesión de estratificaciones A.H. Por tanto aplicando el teorema 6.1 se deduce la existencia de sucesiones de secciones A.H. τ_k de I_k uniformemente transversales a S_k^i.

Así, para k suficientemente grande M está estratificada por las subvariedades $S_{\tau_k}^i = \{x \in M |\ \mathrm{rk}(\tau_k(x)) = i\}$, que son uniformemente transversales a D y aproximadamente casi-complejas.

Si partimos de una variedad calibrada compacta de tipo entero, la estratificación anterior es por subvariedades calibradas.

□

Teorema 7.2. *Sea L_k una sucesión muy amplia de fibrados de línea sobre (M, D, J, g) y sea $E_k = \mathbb{C}^m \otimes L_k$. Cualquier sucesión de secciones A.H. de E_k admite una perturbación arbitrariamente pequeña (en el sentido de sucesiones $C^{\geq r+h}$ ó C^{r+h}-A.H., según se utilice la teoría intrínseca o la relativa), tal que la sucesión resultante de sus proyectivizaciones $\phi_k \colon M - A_k \to \mathbb{CP}^m$ es r-genérica (A_k subvariedad de puntos base de codimesión real $2m+2$).*

PRUEBA. La prueba no es más que la aplicación del teorema de transversalidad fuerte a la estratificación de T-B-A. □

En este punto es necesario observar que la situación no es tan buena como en el caso par. La descripción de las sucesiones de funciones A.H. cerca de los diferentes lugares de degeneración (los estratos inducidos por la estratificación de T-B-A) tiene complicaciones añadidas.

En primer lugar, y al igual que en el caso par, para obtener formas normales es necesario perturbar las funciones para que sean holomorfas en los lugares de degeneración, ya que de lo contrario la holomorfía aproximada no es significativa por ser la parte holomorfa nula (o más generalmente degenerada). En el caso impar tenemos que contar con el hecho de que hay una dirección no holomorfa que no controlamos. Lo más que podremos hacer por lo tanto será aplicar teoremas de genericidad usuales a esta dirección, lo que en determinadas circunstancias nos permitirá determinar hasta cierto punto la expresión de la aplicación en coordenadas adecuadas.

Un caso en que se da esta situación es cuando el espacio de llegada tiene la suficiente dimensión como para que la aplicación genérica sea una inmersión sin autointersecciones, tal y como ocurre en el corolario 1.8, que pasamos a probar.

PRUEBA DEL COROLARIO 1.8. Más generalmente partimos de una sucesión muy amplia de fibrados de línea L_k sobre (M, D, J, g), y se considera $E_k = \mathbb{C}^m \otimes L_k$, donde $m \geq n+2$.

Aplicamos el teorema 6.1 ó 6.2 a la estratificación de T-B-A de $\mathcal{J}^1_D E_k \to (M, D, J, g)$ (resp. $\mathcal{J}^1_G E_k \to (M \times [-\epsilon, \epsilon], J, G, g)$ con $G = D$ y a lo largo de $Q = M \times \{0\}$)), para obtener aplicaciones ϕ_k 1-genéricas. Por como se ha elegido m, el conjunto de puntos base y puntos en los que $\partial\phi_k$ no es inyectiva son vacíos. Es evidente que por construcción $\phi_k^*[\omega_{FS}] = [\omega_k]$.

Por último, la elección de m permite perturbar la sección $\tau_k \in \Gamma(E_k)$ de modo que ϕ_k sea una inmersión sin autointersecciones. Es más, escogiendo la perturbación de tamaño $O(c_k^{-1/2})$ ninguna de las propiedades previas se pierden (seguimos teniendo una sucesión de secciones A.H. 1-genérica). □

Finalizamos este apartado comentando que es posible lograr transversalidad estimada a un número finito de estratificaciones del mismo fibrado. Por ejemplo, podemos obtener el resultado de genericidad necesario para definir inmersiones transversas a un número finito de subvariedades complejas (regulares) de $\mathbb{CP}^m$ y más generalmente el análogo a las foliaciones de codimensión 1 para variedades simplécticas [**9**]. En el primer caso hay que considerar para cada subvariedad la estratificación $\mathcal{J}^1_D(M, \mathbb{CP}^m)$ cuyo único estrato está definido por los 1-jets cuya componente de grado 0 es un punto de la subvariedad; a continuación se levanta a una estratificación $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{J}^1_D E^*_k$ (no importa la estructura cerca de Z_k pues la transversalidad a estos estratos implica que la sucesión permanece lejos de ellos). De este modo se define otra estratificación de $\mathcal{J}^1_D E_k$ que resulta ser trivialmente A.H. por ser las aplicaciones entre las sucesiones de fibrados involucradas en los pullbacks aproximadamente holomorfas (ésta es siempre la propiedad delicada; el resto son evidentes).

Cualquier sucesión de secciones A.H. de E_k que sea 1-genérica y uniformemente transversal a $\mathcal{S}'$, una vez perturbada para dar inmersiones en el proyectivo sin autointersecciones, dará lugar a aplicaciones ϕ_k uniformemente transversales a lo largo de D a la correspondiente subvariedad.

Recordemos que una foliación holomorfa de codimesión 1 de $\mathbb{CP}^m$ viene dada por ϖ una sección holomorfa de $T^{*1,0}\mathbb{CP}^m \otimes L$, donde L es un fibrado de línea holomorfo. Definimos en $\mathcal{J}^1_D(M, \mathbb{CP}^m)$ el subconjunto $\mathbb{P}\mathcal{S}^{\varpi}$ de puntos enviados a la sección $\mathbf{0}$ mediante $\varpi\colon \mathcal{J}^1_D(M, \mathbb{CP}^m) \to L$. Se pude considerar una partición del mismo en estratos correspondientes a las subvariedades del conjunto singular de ϖ, y en el complementario a éstos. Se comprueba que transversalidad uniforme a los primeros implica transversalidad uniforme al último estrato en un entorno tubular de los primeros [**9**] (una especie de condición de Whitney).

De este modo -y para $k >> 0$- $\phi_k^*\varpi$ define tras una pequeña modificación adecuada una sucesión de foliaciones calibradas (singulares). Básicamente esta perturbación es para obtener formas normales en los ceros de $\varpi(j^1_D \phi_k)$ correspondientes al estrato de codimensión compleja n; entre otras cosas garantiza que las hojas cuando se acercan a las componentes de esta subvariedad siguen siendo calibradas.

Digamos que la existencia de inmersiones en espacios proyectivos con propiedades de transversalidad añadidas respecto a foliaciones es un resultado no trivial, a diferencia de las inmersiones del corolario 1.8 para las que la teoría de clases características da un resultado similar (aunque sin holomorfía aproximada).

Otra posible aplicación es, tal y como propone D. Auroux en el caso par [**4**], lograr aplicaciones a $\mathbb{CP}^m$ que sean r-genéricas, y que compuestas con determinadas proyecciones $\mathbb{CP}^m \to \mathbb{CP}^{m-h}$ sigan siendo r-genéricas (de nuevo la holomorfía aproximada de las nuevas estratificaciones se verifica por estar utilizando aplicaciones A.H. para hacer el pullback; también la estructura cerca de las fronteras de los estratos es la adecuada).

También es posible hacer una construcción análoga pero para aplicaciones a grassmannianas $Gr(r, m)$, partiendo de secciones de $\mathbb{C}^{r+1} \otimes E_k$, E_k de rango m (véase [**46, 5**]).

8. Formas normales para aplicaciones aproximadamente holomorfas a $\mathbb{CP}^1$

En esta sección E_k denotará la sucesión de fibrados $\mathbb{C}^2 \otimes L_k$, donde L_k es una sucesión de fibrados de línea muy amplia sobre la variedad casi-compleja (M, D, J, g).

En el fibrado $\mathcal{J}^1_D E_k$ la cuasi-estratificación de Thom-Boardman-Auroux tiene tan sólo dos estratos: Z_k y $\Sigma_{k,n}$.

Por lo visto en las secciones anteriores sabemos que cualquier sucesión de secciones $C^{\geq 1+h}$-A.H. (resp. C^{1+h}-A.H. usando la teoría relativa), $h \geq 2$, puede ser perturbada a una sucesión τ_k con control arbitrario para las derivadas de orden hasta $1+h$ a lo largo de las direcciones de D (resp. en las direcciones de todo el tangente), de modo que sea uniformemente transversal a Z_k y $\Sigma_{k,n}$.

Como consecuencia, se obtiene $\phi_k \colon M - A_k \to \mathbb{CP}^1$ una sucesión A.H. (donde A.H. querrá decir $C^{\geq 1+h}$-A.H. ó C^{1+h}-A.H. según la teoría utilizada) de funciones a $\mathbb{CP}^1$ con las siguientes propiedades:

(1) El conjunto de puntos base $A_k = \tau_k^{-1}(Z_k)$ es una subvariedad compacta de M de codimensión real 4 que corta a D de modo uniformemente transversal (el ángulo mínimo está acotado inferiormente) y tal que el subespacio $D \cap TA_k \subset D$ es aproximadamente J-complejo.

(2) $\Sigma_n(\phi_k)$, definido como el conjunto de puntos donde $\partial\phi_k$ es singular (y en los que en principio no se tiene $d_D\phi_k = 0$ pues hay una parte antiholomorfa posiblemente no nula), es una subvariedad compacta de codimensión $2n$ (un conjunto de nudos) uniformemente transversal a D.

Hasta ahora la clase de coordenadas aproximadamente holomorfas que hemos usado –salvo en los espacios totales de ciertos fibrados– han sido las asociadas a la métrica y aquellas fuertemente equivalentes (la dirección transversal a D, además de tener ángulo mínimo acotado inferiormente, tenía sus derivadas acotadas por $O(c_k^{-1/2})$). En esta sección haremos uso de la noción más general de coordenadas A.H. (con cotas para las derivadas de orden $O(1)$) que además no estarán asociadas a todos los puntos de la variedad sino a puntos de una sucesión de subvariedades.

El contenido de las siguientes proposiciones es mostrar que similarmente a como ocurre en el caso complejo, podemos encontrar coordenadas A.H. $z_k^1, \dots, z_k^n, s_k$, tal que en los puntos de A_k la función ϕ_k es el cociente de dos coordenadas z_k^1, z_k^2, y en los de $\Sigma_n(\phi_k)$ es el análogo a una de Morse compleja (cuadrática en las z_k).

Proposición 8.1. *Para todo punto $a \in A_k$ existen coordenadas A.H. $z_k^1, \dots, z_k^n$, s_k centradas en a (y una carta holomorfa en $\mathbb{CP}^1$) tal que en una bola de g_k-radio fijo en el dominio de las coordenadas, A_k es el espacio $z_k^1 = z_k^2 = 0$, y la función fuera de los puntos de A_k tiene la expresión $\phi_k(z_k, s_k) = \frac{z_k^2}{z_k^1}$.*

PRUEBA. Partamos de coordenadas A.H. usuales centradas en $a \in A_k$ junto con una trivialización A.H. de L_k, por ejemplo por secciones de referencia. Por tanto nuestra sección estará representada por un par de funciones $f_k^i \colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, A.H.; ambas dan lugar a una foliación por subvariedades de codimensión real 4 uniformemente transversal a D_h y con corte con D_h aproximadamente complejo. Podemos suponer, usando una transformación lineal compleja compuesta con otra cuyo tamaño no excede $O(c_k^{-1/2})$, que en el origen el corte con D_h es el subespacio $z_k^1 = z_k^2 = 0$ (obsérvese que en el origen J coincide con J_0 de modo aproximado, pero nada garantiza la igualdad). Las coordenadas buscadas se obtienen rectificando la foliación, o lo que es lo mismo, usando $f_k^1, f_k^2, z_k^3, ..., z_k^n, s_k$ como nuevas coordenadas. Para ellas las dos propiedades de ϕ_k son evidentes por construcción. La transversalidad uniforme implica que el dominio de las nuevas cartas contiene una bola de g_k-radio uniforme (ya que las imágenes de las funciones en las antiguas coordenadas llenan una bola de $\mathbb{C}$ de radio acotado inferiormente). Las cotas de orden $O(1)$ (junto con las que miden la falta de holomorfía) para las derivadas totales de f_k^1, f_k^2 implican que las nuevas coordenadas son A.H.

□

Observación 8.2: En estas coordenadas A.H., nuestra forma restringida a $D_h(0) = D(0)$ es aproximadamente de tipo $(1,1)$. Para ciertos resultados es posible que no queramos hacer referencia a la estructura auxiliar J de nuestra variedad calibrada. En tal caso no tiene sentido hablar de coordenadas A.H. En cualquier caso, podemos modificar las secciones y obtener coordenadas centradas en los puntos de A y con una propiedad de compatibilidad con respecto a ω.

Proposición 8.3. *Existe una perturbación de τ_k de orden a lo sumo $O(c_k^{-1/2})$ de modo que para las correspondientes funciones ϕ'_k podemos encontrar coordenadas A.H. centradas en los puntos b de $\Sigma_n(\phi'_k)$, y cartas holomorfas en $\mathbb{CP}^1$, tal que*

$$\phi'_k(z_k, s_k) = \phi'_k(0, s_k) + (z_k^1)^2 + \cdots (z_k^n)^2$$

Siendo más precisos, es posible encontrar radios $\rho_2 > \rho_1 > 0$, nuevas distribuciones D_k, estructuras casi-complejas J_k y funciones ϕ'_k, tal que:

(1) *$D_k \approxeq D$, $J_k \approxeq J$, siendo $D_k = D$, $J_k = J$ fuera del entorno tubular de $\Sigma_n(\phi_k)$ de radio ρ_2, y ambas integrables en el entorno tubular de radio ρ_1.*
(2) *$\phi_k \approxeq \phi'_k$, $\phi_k = \phi'_k$ fuera del entorno tubular de $\Sigma_n(\phi_k)$ de radio ρ_2, y ϕ'_k holomorfa en el entorno tubular de radio ρ_1.*

PRUEBA. Para cada componente de $\Sigma_n(\phi_k)_\lambda$, $\lambda \in \Lambda_k$, consideramos el entorno tubular construido mediante la aplicación exponencial en cada punto b en las direcciones de $D(b)$. Este fibrado normal es por fibras casi-complejas. Se sigue fácilmente que el fibrado es por tanto complejo. Como tiene por base S^1, es necesariamente trivial.

Teniendo en cuenta que cada componente $\Sigma_n(\phi_k)_\lambda$ –una vez parametrizada para que tenga g_k-velocidad 1– tiene cotas para sus derivadas del orden $O(1)$, es posible encontrar una trivialización del fibrado cuyas secciones tengan ángulo con D acotado inferiormente (sus grafos como funciones de S^1 en el espacio total del fibrado normal) y todas sus derivadas acotadas por $O(1)$. Usando dicha trivialización, tenemos por tanto una aplicación,

$$\varphi_{k,\lambda}\colon \mathcal{N}_\rho(\Sigma_n(\phi_k)_\lambda) \to \mathbb{C}^n \times S^1$$

Es importante reseñar que el radio del entorno tubular ρ es independiente de k, y llena un entorno tubular de $\{0\} \times S^1$ cuyo radio euclídeo es también independiente de k y λ. Estas aplicaciones son complejas en los puntos de $\Sigma_n(\phi_k)_\lambda$ (envían J a J_0).

Sin más que componer con las proyecciones canónicas de $\mathbb{C}^n$ se construyen coordenadas A.H. $z_k^1, ..., z_k^n, \theta_k$, donde podemos pensar que θ_k toma valores o bien en un intervalo apropiado, o bien en $[0, 2\pi]$ cuando nos interese parametrizar todo el entorno tubular (nótese que éstas son las coordenadas A.H. más generales).

Las fibras y estructura compleja J_0 del fibrado inducen una foliación y estructura compleja integrable locales que denotamos mediante D_h y J_0. En el dominio de $\varphi_{k,\lambda}$ es evidente que $D \approxeq D_h$ y $J \approxeq J_0$. La distribución y estructura casi-compleja globales del enunciado son el resultado de interpolar las anteriores. Quizás es necesario resaltar varios puntos.

i. Usamos funciones meseta para interpolar que dependen de la distancia euclídea a $\{0\} \times S^1$. Si éstas no varían demasiado rápido, las cotas de $O(c_k^{-1/2})$ entre las nuevas estructuras globales y las iniciales D, J se verificarán trivialmente. Como el radio ρ es independiente de k, λ, podemos hacer una elección tal de funciones meseta.
ii. La interpolación D_k entre D y D_h se hace poniendo D_h como el grafo de una función $D \to D^\perp$; si se quiere, perturbamos en la dirección de $D^\perp$) (también podría hacerse usando la coordenada angular θ_k).
iii. El caso de las estructuras casi-complejas es similar. En primer lugar, pensamos en ellas como secciones de $T^*M \otimes TM$ anulándose en $D^\perp$. De este modo ambas restringen a estructuras casi-complejas en D_k. Interpolamos usando la estructura lineal del espacio de endomorfismos para definir tensores $\check{J}_k$, que coinciden aproximadamente con J_0 y J. Estos nuevos tensores no necesariamente tienen por cuadrado $-I$, pero sí aproximadamente. No es difícil perturbarlos para definir J_k con $\check{J}_k \approxeq J_k$, y $J_k^2 = -I$: es suficiente elegir una trivialización de la forma $e_1, J_0 e_1, ..., e_n, J_0 e_n$, con $|\nabla^j e_i|_{g_k} \leq O(1)$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Se define J_k sobre la base anterior mediante la fórmula $J_k(e_i) = \check{J}_k(e_i)$, $J_k^2(e_i) = -e_i$. Las cotas para las derivadas de la base implican que el nuevo tensor coincide de modo aproximado con $\check{J}_k$. Por definición, J_k es casi-compleja. Además, en los puntos donde $\check{J}_k$ coincide con J_0 y J respectivamente, J_k lo sigue haciendo.

En los fibrados normales con coordenadas $\mathbb{C}^n \times S^1$ es posible considerar otra teoría aproximadamente holomorfa diferente, sobre la que abundaremos un poco en la siguiente sección. Esencialmente, como D_h es integrable no es necesario usar retracciones para definir derivadas covariantes de secciones de D_h^*. Podemos restringir la métrica g_k a cada hoja y usar la conexión de Levi-Civita para esta métrica inducida. En cualquier caso, como en cada hoja los símbolos de Christoffel y todas sus derivadas tendrán tamaño $O(c_k^{-1/2})$, se puede usar la conexión trivial en cada hoja (cada hoja es la fibra de un fibrado unitario trivial). Es claro que una sucesión de secciones $\phi_k\colon \mathbb{C}^n \times S^1 \to \mathbb{CP}^1$ es A.H. (para D, J ó D_k, J_k) si y solamente si son A.H. para la teoría foliada en D_h con J_0 y g_0, donde g_0 es la métrica euclídea en $\mathbb{C}^n \times [\theta_0-\epsilon, \theta_0+\epsilon]$, para pequeños intervalos de g_k-longitud $O(1)$ recubriendo S^1 (en realidad equivale a considerar la métrica inducida por la producto g' en $\mathbb{C}^n \times S^1$ con factores la euclídea y la esférica respectivamente). Nótese que por construcción la teoría A.H. foliada coincide con la dada por la retracción asociada a la métrica g_0 (o a g'); es evidente que esta retración local pese a no ser fuertemente equivalente a $\bar{\imath}$, sí que es equivalente, por lo que podemos aplicar el lema 3.30.

Es más, $\partial\phi_k$ y $\partial_0\phi_k$ están relacionadas mediante una aplicación de fibrados $q^{\bar{\imath},i_0}$ (la comparación en cada hoja de la métrica euclídea con la inducida), y lo propio ocurre con $\nabla_D\partial\phi_k \approxeq \partial^2_{\mathrm{sym}}\phi_k$ y $\partial_0^2\phi_k$, pero aquí ya de modo aproximado y en un entorno de radio suficientemente pequeño.

Nótese que según la observación 3.32 ésta es una característica propia de teorías fuertemente equivalentes, y en principio no de las equivalentes como es el caso. Ocurre sin embargo que se tiene:

$$\partial_0^2\phi_k \approxeq q_2^{\bar{\imath},i_0}(\partial^2_{\mathrm{sym}}\phi_k) + d_D q^{\bar{\imath},i_0}(\partial\phi_k).$$

El segundo término se anula en $\{0\} \times S^1$ y el primero está acotado por debajo, por lo que en un entorno de radio ρ suficientemente pequeño tenemos el resultado requerido.

La primera consecuencia es que la variación de $\partial\phi_k$ es como la de $\partial_0\phi_k$ en $\mathcal{N}_\rho(\{0\} \times S^1)$. Esto se traduce en que si ρ se ha elegido suficientemente pequeño $\partial_0\phi_k$ tiene los mismos ceros que $\partial\phi_k$ (es decir, tan sólo un S^1 de ceros en el dominio de $\varphi_{k,\lambda}$). Además, como ambas componentes holomorfas están relacionadas por una aplicación de fibrados que es la identidad en la sección $\mathbf{0}$, los ceros de $\partial_0\phi_k$ son exactamente $\{0\}\times S^1 = \Sigma_n(\phi_k)_\lambda$. Del mismo modo, los ceros de $\partial_{J_k}\phi_k$ resultan ser exactamente los de $\partial\phi_k$.

Para la teoría foliada podemos escribir ϕ_k en las coordenadas z_k, θ_k en cada hoja. Por simplicidad, omitimos de ahora en adelante los subíndices para la coordenada angular.

En este punto es razonable interpretar nuestro problema de aproximación para ϕ_k como uno para una familia con parámetro S^1 de funciones de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}$ aproximadamente holomorfas. Recordemos que en principio ϕ_k tiene imagen en $\mathbb{CP}^1$, y queremos encontrar cartas $\varphi_k\colon \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{CP}^1$ de modo que $\varphi_k^{-1} \circ \phi_k(\mathcal{N}_\rho(\Sigma_n(\phi_k)_\lambda))$ tenga imagen uniformemente acotada, para así tener cotas uniformes. En principio es posible encontrar puntos en $\mathbb{CP}^1$ fuera de la imagen del toro sólido $\mathcal{N}_\rho(\{0\}\times S^1)$. Encontrar bolas de radio uniforme fuera de dicha imagen es evidentemente un problema de transversalidad uniforme.

En efecto, elegimos por ejemplo el punto $\infty = [0:1] \in \mathbb{CP}^1$, que define de modo obvio una sucesión A.H. de estratos $\mathbb{P}S_k^\infty$ en $\mathcal{J}_D^0(M, \mathbb{CP}^1)$. Su pullback a $\mathcal{J}_D^1(M, \mathbb{CP}^1)$ define la sucesión de estratos $\mathbb{P}S_k^\infty$ que es también A.H. Es obvio que esta sucesión es transversal a $\mathbb{P}\Sigma_{k,n}$, por lo que la intersección $\mathbb{P}\Sigma_{k,n}^\infty$ define una sucesión de estratos A.H. Es más, podemos descomponer $\mathbb{P}\Sigma_{k,n}$ en esta intersección y su complementario $\mathbb{P}\Sigma_{k,n}^{\mathbb{C}}$. En definitiva y haciendo pullback a $\mathcal{J}_D^1 E_k$, obtenemos $\Sigma_{k,n}^\infty, \Sigma_{k,n}^{\mathbb{C}}, Z_k$ una cuasi-estratificación A.H. finita de Whitney. Si suponemos τ_k transversal a ésta, $\phi_k(\mathcal{N}_\rho(\Sigma_n(\phi_k)_\lambda))$ permanecerá a una cierta distancia η de $\infty \in \mathbb{CP}^1$, para $k >> 0$.

Con esta observación podemos suponer que $\phi_k(z_k, \theta)$ es una sucesión de aplicaciones A.H. en las coordenadas z_k, θ (y con imagen acotada en $\mathbb{C}$).

En este punto y siguiendo las ideas de **[12]** y **[50]**, es posible hacer una primera elección de ϕ_k' que satisface todas la hipótesis de la proposición salvo la proximidad a ϕ_k.

Llamemos $H_\theta(z_k)$ a la forma cuadrática asociada a $\frac{1}{2}\partial_0\partial_0\phi_k(0,\theta)$, el hessiano foliado en los puntos de $\{0\} \times S^1$. Definimos ϕ_k' interpolando entre $H(z_k) + \phi_k(0,\theta)$ y ϕ_k en un anillo adecuado (tal y como hicimos con la distribución y la estructura casi-compleja).

Es evidente la holomorfía de ϕ_k' con respecto a J_k en el entorno tubular correspondiente.

En cuanto a la diferencia entre ϕ_k y $H(z_k) + \phi_k(0,\theta)$, simplemente observamos que en cada hoja $\mathbb{C}^n \times \{\theta\}$ la segunda es, por lo dicho anteriormente, de modo aproximado el desarrollo de Taylor de la primera hasta grado 2. Por tanto,

$$\phi_k(z_k, \theta) - (H(z_k) + \phi_k(0,\theta)) = O(c_k^{-1/2}(|z_k| + |z_k|^2)) + O(|z_k|^3).$$

La función ϕ_k' donde coincide con $H(z_k) + \phi_k(0,\theta)$ verifica que $|\partial\phi_k'| \geq |\bar\partial\phi_k'|$, dándose la igualdad en los puntos de $\Sigma_n(\phi_k)$: en efecto, para ∂_0 y $\bar\partial_0$ es evidente; el resultado deseado se obtiene observando que la derivada de ϕ_k en la dirección de $\frac{\partial}{\partial\theta}$ está acotada superiormente y la forma cuadrática H está acotada por debajo. Escogiendo de modo adecuado el anillo donde tiene lugar la interpolación la propiedad anterior se cumple para ϕ_k, que sigue siendo A.H. y con las propiedades de transversalidad requeridas.

Es posible elegir ϕ_k' con propiedades aún mejores; básicamente, en vez de tomar la primera componente holomorfa significativa del polinomio de Taylor, se toma toda la serie. De modo más preciso y siguiendo las ideas de S. Donaldson y D. Auroux (**[12, 2]**), observamos que la restricción de ϕ_k a cada hoja $\mathbb{C}^n \times \{\theta\}$ es A.H. Se puede encontrar una función $H'(z_k,\theta)\colon B(0,\rho') \times S^1 \to \mathbb{C}$, $r' < r$, verificando:

(1) H' es diferenciable.
(2) $H'_\theta\colon B(0,\rho') \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es holomorfa para todo $\theta \in S^1$.
(3) Para todo $j \in \mathbb{N}$ existe una constante positiva C_j tal que si $k >> 0$ las derivadas parciales hasta orden j de $\phi_k - H'$ están acotadas por $C_j c_k^{-1/2}$, o dicho de otro modo, $\phi_k \approxeq H'$ como funciones de $B(0,\rho') \times S^1$ en $\mathbb{C}$.

Este resultado de aproximación se sigue de una versión con parámetros de la solución al problema $\bar{\partial}$ en la bola de radio 1 de $\mathbb{C}^n$. Por una cuestión de completitud, en el apéndice A presentaremos una solución elemental al problema $\bar{\partial}$ con parámetros derivada de la solución sin parámetros (corolario A.2).

Definimos ϕ'_k interpolando entre ϕ_k y H'. Como ϕ'_k coincide aproximadamente con ϕ_k, los puntos donde $\partial_0\phi'_k$ se anula coinciden de modo aproximado con aquellos donde $\partial\phi_k$ lo hace. Es más, podemos añadir una perturbación del tamaño requerido para que coincidan (sería una traslación en cada hoja añadida a H'). También se tiene que el hessiano $\frac{1}{2}\partial_0\partial_0\phi'_k$ está acotado inferior y superiormente de modo uniforme.

Nada de lo anterior cambia si añadimos perturbaciones de tamaño $O(c_k^{-1/2})$ que sean holomorfas y anulándose hasta orden al menos 2 en el origen de cada hoja. En particular, con una de este último tipo es posible lograr que el Hessiano de H'_θ en el origen tenga autovalores distintos (propiedad genérica).

Sólo queda aplicar el lema de Morse con parámetro para encontrar una aplicación $\Psi\colon \mathbb{C}^n \times S^1 \to \mathbb{C}^n \times S^1$, $(z_k, \theta) \mapsto (w(z_k), \theta)$, de modo que $\phi'_k(z_k(w)) = \phi'_k(0,\theta) + (w^1)^2 + \cdots (w^n)^2$.

Recordemos simplemente que una prueba del lema de Morse está basada en la diagonalización de matrices simétricas (véase por ejemplo [**42**]). Para dicho proceso, en cada uno de los n pasos es necesario hacer una transformación lineal tal que la entrada superior izquierda de una determinada matriz simétrica M_θ sea no nula; es en este paso donde es necesario suponer que los autovalores de la matriz son diferentes (de este modo los autoespacios tiene dimensión compleja uno y dicha transformación lineal puede reducirse a elegir un determinado autoespacio, siendo esta elección diferenciable en θ).

□

Combinando las proposiciones anteriores se demuestra la existencia de "pinceles de Lesfchetz" para variedades calibradas.

Definición 8.4. *En una variedad calibrada una carta $\varphi\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \to M$ se dice compatible con ω (o diremos que son coordenadas compatibles) si en el origen D_h coincide con D y, con respecto a J_0, la restricción de ω es positiva y de tipo* $(1,1)$.

Tal y como referimos antes, usamos esta clase de cartas cuando no queremos hacer referencia a la estructura casi-compleja J elegida, de modo que el concepto de coordenadas A.H. no tiene sentido. Es obvio que una carta en la que J_0 coincide con J en el origen es compatible con ω.

PRUEBA DEL TEOREMA 1.10. Basta elegir una J compatible y construir una sucesión de secciones de $\mathbb{C}^2 \otimes L_k$ que sea uniformemente transversal a la cuasi-estratificación de $\mathcal{J}^1_D E_k$ con estratos $Z_k, \Sigma^{\infty}_{k,n}, \Sigma^{\mathbb{C}}_{k,n}$. Una vez aplicadas las proposiciones 8.1 y 8.3, para valores de k suficientemente grandes la terna $(A_k, \phi'_k, \Sigma_n(\phi'_k))$ da una estructura de pincel de Lefschetz. Simplemente comentamos que la genericidad de $\phi'_k(\Sigma_n(\phi'_k))$ es obvia aplicando una de las perturbaciones de la proposición 8.3 independiente de las coordenadas holomorfas. También es necesario notar que la proposición 8.1 da coordenadas aproximadamente holomorfas, que no son necesariamente compatibles con ω (el problema es que $TA_k \cap D$ no es necesariamente J complejo). En cualquier caso, siguiendo las ideas de S. Donaldson o F. Presas ([**14, 50**]) es posible modificar la función de modo que dispongamos de coordenadas adaptadas a ω con la expresión requerida para la función. $\square$

Al igual que para variedades de contacto, la existencia de pinceles de Lefschetz construidos mediante secciones A.H. de $\mathbb{C}^2 \otimes L_k$ permite relacionar la topología de dos divisores cualquiera de una variedad calibrada (M, D, ω) construidos como ceros de secciones A.H. de L_k uniformemente transversales a $\mathbf{0}$ (posiblemente para estructuras casi-complejas diferentes).

Proposición 8.5. *Sea (M^{2n+1}, D, ω) una variedad calibrada cerrada (de tipo entero) y sean J_1 y J_2 estructuras casi-complejas compatibles. Sean τ_k^1 y τ_k^2 dos sucesiones de secciones A.H. de L_k con respecto a las correspondientes estructuras casi-complejas, ambas uniformemente transversales a $\mathbf{0}$. Entonces existe un $K \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq K$ el divisor W_k^1 es cobordante a W_k^2 mediante un cobordismo en el que sólo adjuntamos asas de dimensión n.*

De ello se deduce en particular que $H_i(W_k^1; \mathbb{Z}) \cong H_i(W_k^2; \mathbb{Z})$ y $\pi_i(W_k^1) \cong \pi_i(W_k^2)$, para $i = 0, ..., n-2$ (un resultado más débil que el teorema del hiperplano de Lefschetz para divisores).

PRUEBA. La prueba es semejante a la dada para variedades de contacto en [**50**]. Por completitud, damos un bosquejo de la misma.

En primer lugar se considera el caso $J_1 = J_2$. Con las secciones τ_k^1 y τ_k^2 se construye la sucesión A.H. (τ_k^1, τ_k^2) de $\mathbb{C}^2 \otimes L_k$. La perturbamos para obtener así un pincel de Lefschetz pero sin formas normales para $B_k := \Sigma_n(\phi_k)$. Si la perturbación es suficientemente pequeña comparada con la cantidad de transversalidad inicial η de ambas secciones, las nuevas secciones, para las que seguimos manteniendo el mismo nombre, darán divisores isotópicos a los iniciales. Por tanto podemos suponer de entrada la 1-genericidad de (τ_k^1, τ_k^2). En el correspondiente pincel de Lefschetz $\phi_k \colon A_k \to S^2$ hemos de comparar las fibras sobre 0 e ∞. El cobordismo será la imagen inversa de un segmento que una estos puntos. Siendo más precisos es necesario explotar antes M en los puntos de A_k en las direcciones de D; el entorno tubular tiene por fibra $\mathbb{C}^2$ y cada punto de la sección cero es sustituido por un $\mathbb{CP}^1$. Hacemos notar que esta operación sólo es topológica (diferenciable), y no pretendemos definir ninguna estructura calibrada en el blow-up $\tilde{M}$.

El conjunto $\phi_k(B_k)$ divide S^2 en componentes conexas isomorfas a discos. Es evidente que las fibras (ahora sí son fibras de verdad si consideramos $\tilde{M}$) sobre puntos en las mismas componentes son isomorfas, pues ϕ_k es ahí una submersión. Por tanto hay que ver que ocurre cuando un segmento uniendo 0 y ∞ atraviesa $f(B_k)$.

La perturbación de ϕ_k necesaria para obtener la forma normal adecuada en los puntos de B_k no afecta para nada a los puntos de W_k^1 y W_k^2.

Si el segmento corta a B_k en un punto b, tomamos una carta centrada en b y la modificamos de modo que $\phi'_k(z,s) = s + iO(s^2) + (z^1)^2 + \cdots (z^n)^2$ (el cobordismo ocurre en un entorno arbitrariamente pequeño del origen donde la citada modificación existe). Igualmente, alteramos el segmento para que coincida con el eje imaginario de $\mathbb{C}$ (en este caso $f(B_k)$ es tangente al eje real en el origen de $\mathbb{C}$).

Teniendo esta expresión para la función, es fácil construir una función de Morse adecuada para el cobordismo y computar el índice del punto crítico, que resulta ser n (ver [**50**]).

Cuando J_1 y J_2 difieren basta demostrar que una vez fijada una distancia en el espacio de estructuras casi-complejas compatibles, para cada J existen un ϵ_J de modo que si J' dista de J menos que ϵ_J, es posible encontrar sucesiones τ_k y τ'_k A.H., cuyos divisores son isotópicos para $k >> 0$. De nuevo referimos al lector a [**50**] para la demostración de esta afirmación. □

9. Variedades casi-complejas foliadas

Sea (M, D, J, g) una variedad casi-compleja para la que la distribución D es la asociada a una foliación $\mathcal{F}$. En esta situación no es necesario escoger una retracción para la proyección $T^*M \to D^*$ para definir una derivada covariante en este último fibrado. Podemos usar en cada hoja $g_{|\mathcal{F}}$ y su conexión de Levi-Civita. En principio esto da lugar a una nueva teoría A.H. que sin duda es la más natural en este tipo de situación. Usamos el subíndice $\mathcal{F}$ para denotar los operadores asociados a esta teoría.

Para esta teoría, se tienen todos los teoremas de transversalidad fuerte y formas normales que teníamos para la asociada a la retracción de la métrica. No es necesario hacer de nuevo todos los desarrollos.

Para cada sucesión E_k de fibrados muy amplios localmente escindibles, tenemos las aplicaciones

$$\bar{r}_j (D^{*1,0})^{\odot j} \otimes E_k \to (\bar{D}^{*1,0})^{\odot j} \otimes E_k,$$

inducidas por la retracción $\bar{r}$ asociada a la métrica. Se comprueba fácilmente en cartas adaptadas a la métrica que, no sólo τ_k es A.H. si y sólo si lo es para la teoría foliada, sino que además $\bar{r}_j(\partial^j_{\mathrm{sym},\mathcal{F}}\tau_k)$ coincide de modo aproximado con $\partial^j_{\mathrm{sym}}\tau_k$. Por tanto, la imagen de $j^r_{\mathcal{F}}\tau_k$ por el correspondiente morfismo de fibrados coincide de modo aproximado con $j^r_D\tau_k$. Se comprueba que las correspondientes estratificaciones de Thom-Boarmann-Auroux están relacionadas mediante la aplicación de fibrados $\mathcal{J}^r_{\mathcal{F}}E_k \to \mathcal{J}^r_D E_k$ inducida por $\bar{r}$. Por tanto, si $j^r_D\tau_k$ es uniformemente transversal a ella, para k suficientemente grande también lo será $j^r_{\mathcal{F}}\tau_k$.

Si uno se decide a repetir todas las construcciones de la teoría intrínseca en el caso foliado, es conveniente usar cartas adaptadas a la foliación en todo el dominio, y no sólo en el origen. La ventaja que se logra al hacer coincidir D_h con D, es que las perturbaciones locales $w\tau^{\mathrm{ref}}_{k,x,j}$ son constantes a lo largo de D_h y por tanto de D. Esto significa que incluso para r-jets ($r \geq 0$) podemos considerar sucesiones de secciones C^{r+h}-A.H., ($h \geq 2$), no habiendo ninguna necesidad de trabajar con secciones $C^{\geq r+h}$-A.H. para las que hay que controlar todas las derivadas.

Nótese que los resultados geométricos para ciertas variedades calibradas foliadas son corolarios directos de los resultados uniparamétricos de la teoría para variedades simplécticas. Esto es algo que comentamos en la introducción como motivación, y que ahora podemos hacer más preciso. Para que no sea necesario entrar en consideraciones locales es necesario trabajar con familias uniparamétricas de variedades simplécticas. En otras palabras, nuestra variedad calibrada $\mathcal{M}(M,\omega,\varphi)$ es el "mapping torus" asociado a un simplectomorfismo φ de (M,ω).

$$\mathcal{M}(M,\omega,\varphi) := \frac{M \times [-1,1]}{\sim_\varphi}$$

Para construir divisores W (o más generalmente pinceles de Lefschetz (A,f,B)), basta encontrar una familia uniparamétrica de los mismos W_t con $\varphi(W_1) = W_{-1}$. Seleccionamos J_{-1} compatible y construimos $W_{k,-1}$ como los ceros de una sección τ_k transversal a $\mathbf{0}$. Es evidente que $\varphi_*^{-1}(J_{-1})$ es compatible con ω, y $\tau_k \circ \varphi$ es $\varphi_*^{-1}(J_{-1})$-A.H. y transversal a $\mathbf{0}$. Sus ceros son las subvariedades simplécticas $W_{k,1} = \varphi^{-1}(W_{k,-1})$. El resultado uniparamétrico nos garantiza, para k suficientemente grande la existencia de familias $W_{k,t}$ de subvariedades simpléctica interpolando entre $W_{k,-1}$ y $W_{k,1}$.

En el caso de los pinceles de Lefschetz, al menos en lo concerniente a genericidad, se interpola igualmente entre las secciones τ_k y $\tau_k \circ \varphi$ de $\mathbb{C}^2 \otimes L_k$. Al ser φ una aplicación $\varphi_*^{-1}(J) - J$ compleja, la transversalidad uniforme de $j^1_D\tau_k$ implica el mismo resultado para $j^1_D(\tau_k \circ \varphi)$ (donde la cantidad de transversalidad está relacionada por la norma de φ). El resultado de isotopía en [**14**] (modificable para lograr no sólo continuidad, sino diferenciabilidad en el parámetro) da una interpolación $(A_{k,t}, \phi_{k,t}, B_{k,t})$ entre las ternas $(A_{k,1}, \phi_{k,1}, B_{k,1})$ y $(A_{k,-1}, \phi_{k,-1}, B_{k,-1})$, donde la $A_{k,t}, B_{k,t}$ son simplécticas, y $\phi_{k,t}$ A.H. para determinadas estructuras casi-complejas J_t. El cálculo de formas normales es, tal y como hemos visto, una generalización fácil del de la teoría par, luego toda la construcción se puede considerar como un corolario de dicha teoría.

9.1. Foliaciones calibradas en 3-variedades cerradas

Quisiéramos ver las aplicaciones de nuestros resultados al caso específico de 3-variedades con foliaciones taut.

Normalmente cuando se define una foliación en una 3-variedad se suele pedir que los cambios de carta sean C^r en las direcciones de las hojas, y al menos continuas en la dirección transversal (si trabajamos con laminaciones entonces el modelo transversal ya no es un intervalo sino una variedad topológica, para la que sólo tiene sentido hablar de continuidad). Se suele decir entonces que el cociclo es C^r.

Toda nuestra teoría necesita diferenciabilidad, en otras palabras, que la foliación venga dada por una 1-forma diferenciable. En este punto se puede utilizar un resultado que establece que para cualquier foliación dada por un cociclo C^r (en particular C^∞) se puede escoger una estructura diferenciable en M^3 para la que la foliación viene definida por una 1-forma C^r (véase el comentario 1.1.2 en [**17**]). En cualquier caso todas las estructuras diferenciables en una 3-variedad son conjugadas.

Existe una segunda debilitación. Por un reciente resultado de D. Calegari [**8**], cualquier foliación $\mathcal{F}$ definida por un cociclo C^r es isotópica a una foliación dada por un cociclo diferenciable (C^∞), tal que las hojas dan inmersiones diferenciables y tienen variación local continua en la topología C^∞. A esta nueva foliación $\mathcal{F}'$ le podemos aplicar el resultado del párrafo anterior, y así tendremos una foliación en M^3 definida por una 1-forma diferenciable. Es más, la condición de ser una foliación taut también se cumple si $\mathcal{F}$ lo era (pues la condición de ser taut es topológica).

En consecuencia, nuestras técnicas se pueden aplicar a cualquier foliación topológica taut (se aplican a $\mathcal{F}'$ y se deshace la isotopía).

Quisiéramos reescribir algunos de los teoremas en este caso específico.

El teorema 1.5 nos da la existencia de ciclos transversales por cada punto y carece de importancia, pues es la propia caracterización de una foliación taut.

En cuanto a la existencia de pinceles de Lefschetz hay una primera particularidad que es la ausencia de puntos base (tienen codimensión 4).

Corolario 9.1. *Sea $(M^3, \mathcal{F})$ una foliación taut en una 3-variedad cerrada y ω una 2-forma cerrada de tipo entero que domina/calibra la foliación. Existen pares (f, B), siendo B un enlace transversal a $\mathcal{F}$ y $f\colon M^3 \to S^2$ una aplicación diferenciable tal que:*

(1) *f es submersión a lo largo de D en $M^3 - B$.*
(2) *$f(B)$ está en posición general (dotando a S^2 de una estructura particular de CW-complejo particular).*
(3) *En cada punto $b \in B$ hay coordenadas z, s compatibles con ω, y coordenadas complejas en S^2, de modo que $f(z,s) = g(s) + z^2$, con $g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$.*

Quisiéramos dar una interpretación de los pinceles de Lefschetz como la extensión uniparamétrica de las construcciones existentes para superficies.

Para ello partimos de una superficie Σ, en este caso de Riemann, y pretendemos relacionarla con la más sencilla de todas las superficies de Riemann, es decir, con $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$. Dicha relación viene dada por un recubrimiento ramificado $f\colon \Sigma \to S^2$, que es una aplicación holomorfa con puntos de índice 2, o lo que es lo mismo, con cartas holomorfas tal que la aplicación es $z \mapsto z^2$. Nótese que desde el punto de vista topológico la aplicación viene totalmente descrita por el lugar de ramificación, su imagen, y el índice en cada punto de ramificación.

La versión uniparamétrica del resultado anterior, o mejor dicho para foliaciones, sería una aplicación que definiera en cada hoja una cubierta ramificada con las propiedades anteriores. Es lógico que el conjunto de ramificación venga dado por una familia uniparamétrica de divisores de Σ, es decir, por un enlace transversal a $\mathcal{F}$. Por último, los puntos de ramificación no podrán ser en general aislados, y lo mejor que podemos lograr es que su imagen esté en posición general.

La estructura de pincel de Lefschetz es por tanto la extensión natural a foliaciones taut de las aplicaciones holomorfas de superficies de Riemann a esferas.

CAPÍTULO II

Una nueva construcción de variedades de Poisson

1. Introducción y resultados

El uso de métodos casi-complejos en geometría simpléctica –sobre los que ya nos hemos extendido sobradamente– junto con la introducción de técnicas de cirugía han aumentado notablemente nuestra compresión de la topología de variedades simplécticas (véanse los artículos [**26, 28, 12, 24**]).

Hemos visto que los métodos casi-complejos son aplicables a variedades calibradas, que podemos entender como una clase de familias uniparamétricas de variedades infinitesimales simplécticas.

El estudio de familias de variedades simplécticas conduce de modo natural a la noción de variedad de Poisson. Es para estas variedades paras las que queremos extender una técnica de cirugía procedente de la geometría simpléctica.

Definición 1.1. *Una estructura de Poisson en una variedad M es una estructura de álgebra de Poisson en su haz de funciones. Esto es, dadas dos funciones f, g definidas localmente se define en la intersección de los dominios un corchete bilineal $\{f, g\}$ verificando las siguientes propiedades:*

(1) *Antisimetría,* $\{f, g\} = -\{g, f\}$.
(2) *Regla de Leibniz,* $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$.
(3) *Identidad de Jacobi,* $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$.

De modo alternativo una estructura de Poisson en una variedad M viene dada por un bivector Λ que cumple $[\Lambda, \Lambda] = 0$, siendo $[\cdot, \cdot]$ el corchete de Schouten (véase por ejemplo [**54**]).

El corchete de Poisson $\{f, g\}$ de dos funciones viene dado en función de Λ mediante la fórmula $\Lambda(df, dg)$. Es más, el tensor de Poisson Λ define de modo natural un morfismo de fibrados $\#\colon T^*M \to TM$ cuya imagen resulta ser una distribución involutiva $\mathcal{S}_\Lambda$ en cuyas hojas se induce de modo canónico una estructura simpléctica. Recíprocamente cualquier foliación $\mathcal{S}$ (generalizada) por variedades simplécticas en una variedad, tal que para cualesquiera funciones diferenciables los campos de vectores hamiltonianos asociados a la restricción de la función a cada hoja pegan en un campo de vectores diferenciable, induce una única estructura de Poisson cuya foliación simpléctica es precisamente $\mathcal{S}$ [**54**]. De este modo se hace precisa la idea anteriormente citada de que las estructuras de Poisson son el marco geométrico para describir familias de variedades simplécticas.

Si nos fijamos en los ejemplos conocidos de variedades de Poisson, se observa que en muchas ocasiones el punto de partida es una estructura algebraica (un álgebra de Lie, un cociclo, etc.), y a continuación se construye la variedad de Poisson cuya álgebra de Poisson está relacionada con la estructura algebraica inicial.

Sería igualmente interesante explorar el punto de vista contrario. Dada una variedad M determinar todas las estructuras de Poisson no triviales que soporta. Por supuesto esta es una tarea extremadamente difícil debido a la no linealidad de las estructuras de Poisson (la condición de cierre es una ecuación en derivadas parciales no lineal). En este sentido cabe mencionar el ya citado trabajo de M. Bertelson que ha analizado en **[6]** la caracterización de aquellas foliaciones regulares que proceden de estructuras de Poisson.

Siguiendo con este punto de vista, otra vía cuyo seguimiento es obligado es comprobar la posibilidad de extender determinadas construcciones topológicas (diferenciables) a la categoría de Poisson. Esto ya se ha hecho en el marco simpléctico; D. McDuff **[40]** ha definido el "blowing-up" de una variedad simpléctica. R. Gompf **[24]** ha usado la suma conexa normal para construir variedades simplécticas con grupo fundamental arbitrario (entre otras muchas cosas). En este sentido la geometría simpléctica es flexible en acusado contraste con la geometría Kähler.

Es evidente que se pueden construir familias triviales de variedades simplécticas sin más que tomar el producto de una variedad simpléctica M con una variedad compacta arbitraria Q (con estructura de Poisson trivial). La correspondiente estructura de Poisson producto tendrá el mismo grupo fundamental que M siempre que $\pi_1(Q) = 0$. Luego a menos que estemos en el caso de familias uniparamétricas, la existencia de familias de variedades simplécticas con grupo fundamental arbitrario es obvia (aunque para nada su clasificación).

El problema de la construcción de familias de variedades simplécticas con grupo fundamental arbitrario se reduce por tanto al caso particular de variedades de Poisson con hojas simplécticas de codimensión 1, y más concretamente a la búsqueda de 5-variedades de Poisson de rango 4 (hojas simplécticas de dimensión 4) con grupo fundamental arbitrario.

Para resolver el problema anterior introduciremos una construcción de "cirugía" para variedades de Poisson que extiende de modo natural la construcción de Gompf (teorema 4.4).

Comenzaremos recordando en la sección 2 como cualquier 3-variedad cerrada orientable admite una estructura regular de Poisson de rango 2. Esta construcción, que se basa es resultados clásicos de la teoría de foliaciones en 3-variedades, contiene las ideas esenciales que nos permitirán proponer una técnica de cirugía para variedades de Poisson.

A grandes rasgos, partiremos de la conocida suma normal conexa de variedades simplécticas a lo largo de subvariedades de codimensión 2, y daremos una generalización para variedades de Poisson que esencialmente será una versión paramétrica de la anterior (con parámetro compacto). Para ello será necesario recordar ciertas propiedades de las *estructuras de Poisson fibradas* (definición 3.1), puesto que lo que sustituirá a la subvariedad simpléctica será una *subvariedad de Poisson transversal fibrada* (definición 3.2).

La sección 4 estará dedicada a probar que la variedad foliada construida mediante *suma conexa normal* admite una estructura de Poisson extendiendo a las de los sumandos, y que es única en un sentido que se precisará (teorema 4.4). La manera de proceder para probar este resultado es evidente: sin ser muy precisos, se pretende encontrar unos ciertos modelos para las estructuras de Poisson en los subconjuntos que se quieren identificar. Estos modelos serán versiones paramétricas de los simplécticos, y será posible encontrarlos porque el modo de hacerlo para variedades simplécticas es mediante el uso de ciertos operadores, que por supuesto también existiran con las propiedades requeridas para familias compactas.

En la sección 5 estudiaremos la *clase modular* (véase [**57**]) de algunas de las variedades construidas mediante cirugía. Los resultados indican el fuerte carácter topológico de la construcción pues ciertas propiedades de la estructura de Poisson de los sumandos se podrán ver alteradas en la suma conexa normal.

Es esta flexibilidad lo que nos permitirá demostrar en la sección 6 la aplicación principal de la construcción de cirugía introducida.

Teorema 1.2. *Sea G cualquier grupo finitamente presentado. Entonces para cualesquiera enteros $n, d \geq 4$, d par, existe una variedad de Poisson cerrada y orientada $(M^{n,d}, \Lambda)$ de dimensión n y rango constante d tal que $\pi_1(M^{n,d}) \cong G$. Estas variedades tienen clase de Godbillon-Vey nula, pero aquellas con una foliación simpléctica de codimensión 1 no son unimodulares (ni variedades calibradas). Es más, pueden escogerse de modo que admitan estructuras spin.*

Concluimos este capítulo en la sección 7 con una segunda aplicación que consideramos interesante a la luz del estudio previo que hemos hecho de las variedades calibradas. En ella describimos condiciones bajo las cuales si las variedades de Poisson de partida son calibradas de clase entera, entonces la suma conexa normal, que es variedad de Poisson regular con hojas simplécticas de codimensión 1, admite un levantamiento a una estructura calibrada que extiende a la de los sumandos (teorema 7.1).

2. Estructuras de Poisson en 3-variedades

Una estructura regular de Poisson de rango 2 en una 3-variedad M^3 no es sino una foliación por superficies con una forma de área foliada diferenciable. Si M^3 es orientable encontrar una estructura tal es una problema elemental de topología diferencial, cuya única parte no trivial es introducir una foliación por superficies orientables.

Vamos a bosquejar una solución a éste problema (en la que no le pedimos mucho a la foliación), porque contiene las ideas esenciales que dan lugar a la construcción de cirugía para variedades de Poisson más generales.

Recordemos que toda 3-variedad cerrada y orientable se puede obtener mediante cirugía en un enlace con componentes k_j. Es más, los "framings" son de la forma $(m_j \pm 1 l_j)$, donde m_j, l_j son el meridiano y la longitud respectivamente del toro frontera. Nótese que las componentes del enlace se pueden elegir tan próximas al nudo trivial como queramos, y por tanto transversales a la foliación de Reeb $\mathcal{R}$ de S^3, i.e., los nudos son *subvariedades transversales a las hojas que heredan la estructura de Poisson trivial.* Una vez que se han vaciado entornos tubulares de k_j, en los toros sólidos $T_j = D^2 \times S^1$ que se van a pegar la frontera de las hojas de $\mathcal{R}$ serán curvas en ∂T_j que no separan (y cortando una vez el meridiano). Como dichas curvas son no triviales en la homología del toro sólido T_j, no será posible pegar una superficie abierta en cada una de estas curvas para "cerrar" las hojas. En su lugar podemos vaciar un pequeño entorno tubular $\mathcal{N}_j$ de la longitud $\alpha_j = \{0\} \times S^1$, y encontrar una aplicación $\phi_j : T_j - \mathcal{N}_j \to S^1 \times I \times S^1$ que envié la imagen de la curva m_j en T_j a $S^1 \times \{0\} \times \{e\}$, el meridiano $S^1 \times I \times S^1 \subset D^2 \times S^1$. Por tanto el pullback de la foliación de Reeb de $S^1 \times I \times S^1$ da lugar a una foliación excepto en el toro sólido que vaciamos, donde de nuevo podemos añadir una componente de Reeb.

Luego hemos probado el ya clásico resultado:

Proposición 2.1 ([36]). *Toda 3-variedad cerrada y orientable admite una estructura de Poisson regular de rango* 2.

Usando las ideas anteriores se ve que cualquier nudo fibrado en una 3-variedad da lugar a una foliación con una componente de Reeb y una componente de Reeb modificada, en la que en lugar de tener discos aproximándose al toro T^2 se tienen superficies orientadas agujereadas (las superficies de Seifert del nudo).

Es en dimensiones mayores que 3 donde las construcciones de cirugía son una herramienta muy importante para "diseñar" variedades con determinadas propiedades topológicas. Luego contar con una construcción tal compatible con las estructuras de Poisson nos permitiría concluir la existencia de variedades de Poisson con un amplio espectro de propiedades topológicas.

3. Estructuras de Poisson fibradas

Hemos visto que para llevar a cabo la construcción de cirugía de la sección anterior en 3-variedades de Poisson no es necesario preocuparse sobre como definir el tensor de Poisson en la nueva variedad, sino tan sólo de definir la foliación por superficies.

No es difícil proponer una construcción de cirugía para variedades de Poisson que extiende la suma conexa normal para variedades simplécticas. Sin ser muy específicos, usaremos una subvariedad transversal a la foliación y que corta a cada hoja en una subvariedad simpléctica. Ello nos permitirá realizar la suma conexa normal a lo largo de cada subvariedad simpléctica (en la hoja correspondiente), demostrando así que la variedad resultante admite una estructura de Poisson determinada (hasta cierto punto) por las estructuras de partida.

Veremos que si se adopta el marco adecuado, los resultados a probar resultarán ser generalizaciones naturales de aquellos de Gompf [**24**].

3.1. Estructuras de Poisson compatibles en fibrados

Sea $\pi\colon P \to Q$ un fibrado (siempre localmente trivial).

Definición 3.1. *Decimos que una estructura de Poisson Λ_P en P es compatible con la estructura de fibrado si las hojas simplécticas de Λ_P son las fibras de π (luego las fibras son conexas). También denominaremos a la terna (P, π, Λ_P) como una variedad de Poisson fibrada.*

Si P es compacta la definición anterior equivale a decir que el espacio de hojas es una variedad diferenciable Q de modo que la proyección $\pi\colon P \to Q$ es una submersión.

Empezamos por recordar que siempre que se tiene una foliación (regular) se puede hacer el calculo exterior usual en los fibrados asociados a la distribución que define la foliación. En nuestro caso tendremos una fibración localmente trivial $\pi\colon P \to Q$ y el fibrado en cuestión en el que estaremos interesado será el de vectores verticales, i.e., el núcleo de π. Hablaremos de campos de vectores y k-formas verticales, derivadas de Lie en la dirección de campos de vectores verticales, y derivadas exteriores de k-formas verticales.

Denotaremos el conjunto de k-formas verticales mediante $\Omega^k_{\text{fib}}(P \to Q)$, y por d_π la derivada exterior vertical (o simplemente mediante d si no hay posibilidad de confusión). Recordemos que se puede hacer el pullback de formas verticales mediante morfismos de fibrados, y que toda relación en términos de derivadas de Lie también se cumple para campos de vectores y formas verticales (porque se cumple en cada fibra y define una sección diferenciable del fibrado vectorial correspondiente).

El citado cálculo diferencial no es sino el asociado al algebroide de Lie que la fibración (o más generalmente una foliación) define [**10**].

Para los grupos de cohomología del complejo $(\Omega^*_{\text{fib}}(P \to Q), d_\pi)$ empleamos la notación $H^k_{\text{fib}}(P \to Q)$. Se tienen las correspondientes aplicaciones de "olvido" $f\colon \Omega^k(P) \to \Omega^k_{\text{fib}}(P \to Q)$, y $f\colon H^k(P) \to H^k_{\text{fib}}(P \to Q)$.

Es mera rutina el comprobar que una estructura de Poisson Λ_P compatible con la fibración $\pi\colon P \to Q$ viene determinada por una 2-forma vertical cerrada no singular $\omega_P \in \Omega^2_{\mathrm{fib}}(P \to Q)$ (luego $[\omega_P] \in H^2_{\mathrm{fib}}(P \to Q)$). Llamaremos a ω_P *la 2-forma de Poisson* (o simplemente *la forma de Poisson*) de Λ_P.

Usaremos determinados resultados de la cohomología $H^*_{\mathrm{fib}}(P \to Q)$.

Comenzamos por recordar que en una variedad riemanniana cerrada la teoría de Hodge nos da para cada k-forma α una descomposición única:

$$\alpha = d\beta \oplus \delta\eta \oplus \rho,$$

donde β es coexacta, η exacta y ρ armónica, y las tres son imágenes de α mediante operadores diferenciales.

Se tienen resultados similares para la teoría de Hodge relativa para el par (N, K), donde N es una variedad compacta y K un conjunto cerrado (para formas con soporte contenido en $N - K$). Una consecuencia obvia es que se tienen los resultados anteriores para una variedad compacta N con frontera no vacía y formas con soporte en el interior de N (basta aplicar teoría de Hodge relativa al doble de la variedad).

Cuando $\pi\colon P \to Q$ es una fibración localmente trivial y P cerrada, se puede aplicar teoría de Hogde a lo largo de las fibras para obtener la misma descomposición de la ecuación (3.1) para k-formas verticales. Observemos que cualquier métrica en P restringe a una métrica en cada fibra en la que podemos aplicar teoría de Hodge usual. El resultado de pegar los correspondientes operadores en cada fibra son operadores de proyección diferenciales ya que en una trivialización estamos simplemente trabajando con familias diferenciables de k-formas y métricas.

Si P es compacta y $\partial P \neq \emptyset$, la teoría de Hodge relativa $(P, \partial P)$ (usando formas cuyo soporte no interseca ∂P) también se cumple porque en cada trivialización (que usamos para comprobar la diferenciabilidad de la construcción) las fronteras se identifican como conjuntos.

Una consecuencia de lo anterior es que para $\pi\colon P \to Q$ localmente trivial y P cerrada (resp. compacta con $\partial P \neq \emptyset$), una forma vertical cerrada (resp. una forma cerrada cuyo soporte no interseca ∂P y por tanto se anula en un entorno de esta frontera) es exacta si y solamente si lo es a lo largo de cada fibra (resp. exacta con forma potencial anulándose en un entorno de la frontera).

También se infiere que para una familia diferenciable (compacta) de k-formas verticales exactas se puede encontrar una familia diferenciable de $(k-1)$-formas cuya derivada exterior es la familia inicial. Si todas las k-formas se anulasen en un entorno de la frontera, las $k-1$-formas también lo harían en ese entorno.

3.2. Subvariedades de Poisson transversales fibradas

Una subvariedad de Poisson [**56**] de una variedad de Poisson (M, Λ_M) se define como la terna (P, Λ_P, j), donde $j\colon (P, \Lambda_P) \to (M, \Lambda_M)$ es un morfismo de Poisson que sumerge P en M sin autointersecciones. Además de éstas, hay subvariedades de una variedad de Poisson que heredan de modo natural una estructura de Poisson (la foliación induce una foliación por subvariedades simplécticas que definen una estructura de Poisson), aunque la inclusión natural no es un morfismo de Poisson. Consideraremos subvariedades de variedades de Poisson desde este punto de vista más general.

Por tanto, *una subvariedad de Poisson* de una variedad de Poisson será una subvariedad intersecando las hojas en subvariedades simplécticas y heredando una estructura de Poisson (necesariamente única) a partir de Λ_M.

En nuestro caso nos concentraremos en una clase especial de subvariedades de Poisson compatibles con la una fibración dada.

Definición 3.2. *Sea (M, Λ_M) una variedad de Poisson de dimensión n y de rango d, (P, Λ_P) una variedad de Poisson donde P es compacta y fibra sobre la variedad Q de dimensión $n-d$, y Λ_P es compatible con la fibración. Una inmersión sin autointersecciones $j\colon P \to (M, \Lambda_M)$ se dice que sumerge (P, Λ_P) como una subvariedad de Poisson transversal fibrada de (M, Λ_M) si:*

i *$j(P)$ está contenido en el conjunto regular de (M, Λ_M).*
ii *$j(P)$ corta transversalmente las hojas simplécticas de (M, Λ_M).*
iii *$j(P)$ hereda una estructura de Poisson de (M, Λ_M) que coincide con Λ_P.*

La existencia de una subvariedad tal implica que las hojas simplécticas de (M, Λ_M) están dispuestas de un modo "razonable" en un entorno de la subvariedad. Para ser más preciso:

Lema 3.3. *Si $j\colon P \to (M, \Lambda_M)$ sumerge la variedad de Poisson fibrada $(P, \Lambda_P) \to Q$ en M como una subvariedad de Poisson transversal fibrada de codimensión r de (M, Λ_M), entonces su fibrado normal (isomorfo a un pequeño entorno tubular), con la estructura de Poisson inducida, es también una variedad de Poisson fibrada sobre Q.*

PRUEBA. Para cada $x \in P$ denotemos mediante $S_{j(x)}$ a la hoja simpléctica de Λ_M por el punto $j(x)$. $\Lambda_{M|S_{j(x)}}$ es el inverso de una forma simpléctica $\omega_M(x)$ en $T_{j(x)}S_{j(x)}$, y $T_{j(x)}(j(P) \cap S_{j(x)})^{\perp_{\omega_M}}$ –el ortogonal simpléctico de $T_{j(x)}(j(P) \cap S_{j(x)})$– es un r-plano simpléctico transversal a $T_{j(x)}j(P)$, por lo que lo podemos tomar como modelo de fibra para el fibrado normal $\nu(P)$ de la inmersión. Es más para cada hoja $S_P \subset P$, la restricción del citado modelo es también el modelo para la inmersión de la hoja correspondiente $S_P \subset S_M$. De hecho podemos considerar cualquier estructura compleja compatible en el conjunto regular de (M, Λ_M) y la métrica correspondiente en cada hoja. $T_{j(x)}(j(P) \cap S(j(x)))^{\perp_{\omega_M}}$ es entonces el ortogonal de $T_{j(x)}(j(P) \cap S_{j(x)})$ con respecto a esta métrica a lo largo de las hojas, la cual puede ser usada para identificar el fibrado normal con un pequeño entorno tubular de $j(P)$. Este conjunto abierto hereda una estructura de Poisson que mediante el isomorfismo trasladamos al fibrado normal (diferentes isomorfismos, dependiendo de la elección de estructura casi-compleja, dan estructuras de Poisson isomorfas).

La localidad trivial de $\tilde{\pi}\colon \nu(P) \to Q$ se sigue de la del fibrado de esferas asociado, que es una variedad compacta (y la proyección una submersión sobreyectiva) □

4. La construcción principal: cirugía de Poisson

Sea (M, Λ_M) una variedad de Poisson de dimensión n y de rango d. Consideremos (P, Λ_P) una variedad compacta fibrada de Poisson de dimensión $n-2$ sobre el espacio base Q, éste de dimensión $n-d$.

Supongamos que tenemos dos inmersiones (siempre sin autointersecciones) disjuntas $j_a\colon P \to M$, $a = 1, 2$, ambas sumergiendo (P, Λ_P) como una subvariedad de Poisson transversal fibrada de (M, Λ_M). Asumamos que los fibrados normales ν_a (usando el modelo proporcionado por el lema 3.3 y considerando la orientación inducida por la estructura de Poisson) tienen clase de Euler opuesta. Después de identificar ν_a con un entorno tubular V_a de $j_a(P)$, cualquier isomorfismo que invierta la orientación $\psi\colon \nu_1 \to \nu_2$ induce un difeomorfismo $\varphi\colon V_1 - j_1(P) \to V_2 - j_2(P)$ que preserva la orientación de las fibras (los planos), como la composición de ψ con el difeomorfismo $h(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$ que manda cada fibra sin el origen de "dentro hacia fuera".

Definición 4.1. *Denotemos como $\#_\psi M$ a la subvariedad diferenciable foliada que se obtiene de $M - (j_1(P) \cup j_2(P))$ identificando $V_1 - j_1(P)$ con $V_2 - j_2(P)$ vía la composición $h \circ \psi$.*

Si M es una unión disjunta $M_1 \coprod M_2$ y j_a envía P en M_a, la citada variedad será llamada suma conexa normal de M_1 y M_2 a lo largo de P (vía $h \circ \psi$), y usaremos la notación $M_1 \#_\psi M_2$.

Es fácil comprobar que el tipo de difeomorfismo (como variedad foliada) está determinado por (j_1, j_2) y la identificación invirtiendo la orientación $\psi\colon \nu_1 \to \nu_2$ (salvo isotopías preservando las fibras). Una vez que las identificaciones anteriores han sido elegidas, las (clases de) posibles elecciones están en biyección con $[P, S^1] \cong H^1(P; \mathbb{Z})$.

4.1. Observaciones topológicas

Si partimos de una orientación μ_M en (M, Λ_M), ésta determina en un entorno de $j_a(P)$ -junto con la estructura de Poisson- una orientación en P, y esta última a su vez con la estructura de Poisson restringida ω_P una orientación en Q. Si las orientaciones en Q inducidas de este modo por las los entornos V_a coinciden, entonces μ_M induce una orientación en $\#_\psi M$.

Hay resultados muy bien conocidos sobre la topología de $M_1 \#_\psi M_2$ (véase **[24]**).

En primer lugar $\#_\psi M$ es cobordante (con cobordismo orientado) a M. Se comprueba al identificar en el cobordismo trivial $M \times [0,1]$ entornos de $j_1(P)$ y $j_2(P)$ en el nivel $\{1\}$, y a continuación "redondeando las esquinas" para obtener la variedad diferenciable X que da el cobordismo.

En consecuencia los números de Pontrjagin ($\#_\psi M$ orientado) se comportan aditivamente, y en el caso de dimensiones pares las formulas para la característica de Euler y la signatura son, respectivamente:

$$\chi(M_1 \#_\psi M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2\chi(P).$$
$$\sigma(M_1 \#_\psi M_2) = \sigma(M_1) + \sigma(M_2), \ (\#_\psi M \text{ orientado})$$

Al igual que para variedades simplécticas, si $\#_\psi M$ está orientada la construcción de cirugía es compatible, eligiendo las trivializaciones ("framing") adecuadas, con estructuras spin.

Así pues podemos concluir:

Lema 4.2. *Si M admite una estructura spin y $H^2(P;\mathbb{Z})$ no tiene $\mathbb{Z}_2$-torsión, existe una elección de ψ para la que $\#_\psi M$ admite una estructura spin que extiende la de M.*

PRUEBA. Véase la proposición 1.2 en **[24]**. □

4.2. Observaciones relativas a la foliación de $\#_\psi M$

Si se parte de una variedad regular transversalmente orientable M, entonces $\#_\psi M$ también es regular y transversalmente orientable (orientabilidad en variedades de Poisson es equivalente a orientabilidad transversal), y su clase de Godbillon-Vey $GV(\#_\psi M)$ puede ser computada en términos de la de M. En particular:

Lema 4.3. *Sea M transversalmente orientable. Entonces $GV(M) = 0$ si y solamente si $GV(\#_\psi M) = 0$.*

PRUEBA. Es posible vaciar entornos tubulares fibrados (cerrados) W_a de $j_a(P)$ tal que se tenga una inclusión $i \colon M - (W_1 \cup W_2) \to \#_\psi M$, y un entorno de la frontera de $M - (W_1 \cup W_2)$ sea un fibrado sobre P (con fibra un anillo).

La anulación de $GV(M)$ implica, por naturalidad, la anulación de la clase de Godbillon-Vey de $M - (W_1 \cup W_2)$. Como los "extremos" fibran sobre P, se puede escoger un representante β de la clase que se anule en ellos e inferir la existencia de una forma γ anulándose también en ellos y cuya derivada exterior es β. Finalmente, extendiendo β y γ a formas $\tilde{\beta}$ y $\tilde{\gamma}$ definidas en M, se tiene $d\tilde{\gamma} = \tilde{\beta}$, donde $[\tilde{\beta}] = GV(M)$.

Las otra dirección se prueba de un modo similar. □

4.3. Construcción de la forma de Poisson en $\#_\psi M$

El objetivo principal es construir una forma de Poisson en $\#_\psi M$. Para ello es necesario modificar ligeramente la construcción previa.

Al tener que definir una estructura simpléctica en cada una de las hojas resultantes es más conveniente usar en vez de los fibrados normales (cuyas fibran tienen área infinita), los fibrados ν_a^0 de discos de radio $\pi^{-1/2}$. Componemos ψ (que podemos suponer invierte la forma de área en cada fibra) con la aplicación

$$i(x) = \left(\frac{1}{\pi\|x\|^2} - 1\right)^{1/2} x\,,$$

que envía de dentro hacia fuera cada disco menos su origen.

Hacemos notar que V_1, V_2 e Y, la imagen de $(V_1 \cup V_2) \times [0,1]$ en X (la variedad cobordismo entre M y $\#_\psi M$), son fibrados localmente triviales sobre Q.

Cualquier forma cerrada $\omega \in \Omega^k_{\text{fib}}(V_1 \cup V_2 \to Q)$ satisfaciendo $j_1^*\omega = j_2^*\omega$ induce una forma $\Omega_{\tilde V} \in \Omega^k_{\text{fib}}(\tilde V \to Q)$, que es única salvo una elección de k-forma exacta $d\alpha, \alpha \in \Omega^{k-1}_{\text{fib}}(\tilde V \to Q)$ con soporte compacto, donde $\tilde V \subset \#_\psi M$ es la imagen de $V_1 \cup V_2$ en $\#_\psi M$.

Para obtener un representante $\Omega_{\tilde V}$ en esta familia se contraen entornos disjuntos de $j_a(P)$ (conteniendo V_a^0, la imagen de ν_a^0) sobre $j_a(P)$, y se extendiende esta aplicación a una retracción diferenciable $\rho\colon M \to M$ isotópica a la identidad, que coincide con la identidad fuera de un conjunto compacto de $V_1 \cup V_2$, preserva las fibras de V_a, y conmuta con $\hat{\jmath}_2 \circ \psi \circ \hat{\jmath}_1^{-1}$ en V_1 y V_2. La k-forma en cuestión es la restricción a $\tilde V$ de la inducida en Y por $\rho^*\omega$.

Diferentes elecciones de retracción darán lugar a dos k-formas cuya diferencia será un elemento de $\Omega^k_{\text{fib}}(\tilde V \to Q)$ con soporte compacto. La exactitud de esta forma cerrada, tal y como indicamos, es equivalente a su exactitud restringida a cada fibra. Esta comprobación se reduce al proceso descrito por Gompf. Recordemos que al "redondear esquinas" para obtener Y, podemos pensar que se han añadido nuevos niveles , i.e., tendríamos una aplicación $p_2\colon Y \to [0, 1+\epsilon]$ tal que el nivel $1+\epsilon$ es $\tilde V$, donde las circunferencias de radio $\pi^{-1/2}$ se identifican. Según descendemos de $1+\epsilon$ a 1, identificamos circunferencias de radio cada vez más pequeño hasta que alcanzamos el nivel 1 donde $j_1(P)$ y $j_2(P)$ son identificadas. Los niveles correspondientes a valores menores que 1 son difeomorfos a $V_1 \cup V_2$.

Dada otra retracción ρ', para evaluar la diferencia de las k-formas $\rho^*\omega_{|\tilde V} - \rho'^*\omega_{|\tilde V}$, enviamos la subvariedad de dimensión k (posiblemente singular) sobre la que tenemos que integrar a una homótopa $M_k \subset p_2^{-1}(1+\epsilon]$ ("empujando para abajo"), de modo que esté contenida en $p_2^{-1}([0,1])$ y en el nivel 1 esté contenida en $j_1(P) \times \{1\}$. A continuación se corta Y para deshacer la identificación y se proyecta $(V_1 \cup V_2) \times [0,1] \to V_1 \cup V_2 \times \{0\}$. La proyección de M_k define una subvariedad con frontera M_k' sobre la que se integra $\rho^*\omega - \rho'^*\omega$. Como las retracciones son homótopas a la identidad, tanto $\rho^*\omega$ como $\rho'^*\omega$ representan la misma clase de homología que ω. Este hecho, junto con la igualdad $j_1^*\omega = j_2^*\omega$, implica que $\int_{M_k'} \rho^*\omega - \omega = 0 = \int_{M_k'} \rho'^*\omega - \omega$. Luego la integral de la diferencia se anula.

Ahora ya tenemos todas la herramientas para demostrar que la construcción de cirugía funciona para variedades de Poisson.

Teorema 4.4. *Sea (M, Λ_M) una variedad de Poisson de dimensión n y de rango $d \geq 2$, y sea (P, Λ_P) una variedad cerrada de Poisson de dimensión $n-2$ tal que Λ_P es compatible con la estructura de fibrado $\pi\colon P \to Q$, donde Q es una variedad de dimensión $n-d$. Sean $j_a\colon (P, \Lambda_P) \to (M, \Lambda_M)$, $a = 1, 2$, dos inmersiones disjuntas de (P, Λ_P) que lo sumergen como subvariedad de Poisson transversal fibrada de (M, Λ_M). Supongamos que existe un isomorfismo invirtiendo la orientación de los fibrados normales $\psi\colon \nu_1 \to \nu_2$. Entonces $\#_\psi M$, la suma normal conexa a lo largo de $j_a(P)$, admite una estructura de Poisson Λ caracterizada como sigue:*

Dadas identificaciones disjuntas $\hat{j}_a\colon \nu_a \to V_a$ de los fibrados normales con entornos tubulares V_a de $j_a(P)$ que envían fibras en hojas, si denotamos mediante $\tilde{V}$ a la imagen de $V_1 \cup V_2$ en $\#_\psi M$, $\tilde{V}$ es un fibrado localmente trivial con base Q. Entonces existe una única clase (salvo isotopías de fibrados) en $\tilde{V}$ conteniendo elementos ω satisfaciendo la siguiente caracterización:

(1) *Sea $\Omega_{\tilde{V}}$ cualquiera de las 2-formas inducidas en $\tilde{V}$ por ω_M (tal y como hemos indicado previamente al enunciado de este teorema). Entonces $\omega - \Omega_{\tilde{V}} \in \Omega^2_{\mathrm{fib}}(\tilde{V} \to Q)$ (que es cerrada) tiene soporte compacto y es exacta (no depende del representante).*
(2) *Podemos elegir la identificación $\hat{j}_1 : \nu_1 \to V_1 \subset M$ (salvo isotopía (rel. $j_1(P)$) con soporte compacto) de modo que la forma de Poisson ω_M sea $SO(2)$-invariante en $V_1^0 = \hat{j}_1(\nu_1^0)$, siendo ν_1^0 el fibrado de discos abiertos de radio $\pi^{-1/2}$, y en el cierre de cada fibra de V_1^0 sea simpléctica con área t_0 independiente de la fibra (se puede hacer una isotopía de la inmersión inicial en otra fijando el complemento de cada disco de radio $r > \pi^{-1/2}$). Las formas $(1-s)\omega_M + s\pi^*\omega_P$, $0 \leq s < 1$, son todas de Poisson en el cierre de V_1^0.*
(3) *Existe una 2-forma (vertical) cerrada ζ con soporte compacto en $V_2^0 = \hat{j}_2(\nu_2^0)$, siendo ν_2^0 el fibrado de discos abiertos de radio $\pi^{-1/2}$, de modo que para todo $t \in [0, t_0]$ la forma $\omega_M + t\zeta$ es de Poisson tanto en $V_1 \cup V_2$ como en $j_2(P)$.*
(4) *Hay una aplicación $\chi\colon \nu_2 \to \nu_2$ (preservando los discos) isótopa a la identidad con soporte en ν_2^0, tal que fuera de un subconjunto compacto K de V_1^0, la aplicación $\varphi = \hat{j}_1 \circ \psi \circ i \circ \chi \circ \hat{j}_2\colon V_1^0 - j_1(P) \to V_2^0 - j_2(P)$ (donde $\hat{j}_1$ es como en el punto (2)) es Poisson con respecto a la forma de Poisson $\tilde{\omega}_M = \omega_M + t_0\zeta$ en M (i.e, se modifica la inmersión $\hat{j}_2$ a $\chi \circ \hat{j}_2$). La variedad $\#_\psi M$ se obtiene a partir de $(M - (K \cup j_2(P)), \tilde{\omega}_M)$ pegando a través de φ (se sigue por tanto que ω coincide con ω_M en la imagen en $\#_\psi M$ del complemento de $V_1^0 \cup V_2^0$).*

Las diferentes elecciones de inmersiones de los fibrados normales están conectadas por una isotopía que preserva la clase de isotopía descrita anteriormente.

Finalmente, la forma ω depende de modo diferenciable de ω_M, ω_P (y por tanto de j_1, j_2) y puede ser construida con cada $V_a, a = 1, 2$, incluido en un entorno preasignado de $j_a(P)$.

La prueba del teorema 4.4 es el contenido de los siguientes apartados.

4.4. El operador de contracción

Recordamos que $\nu(P)$ es un fibrado con grupo estructural $SO(2)$.

Denotemos mediante $\tau_s\colon \nu(P) \to \nu(P)$, $0 \leq s \leq 1$, a la multiplicación por s en cada disco y sea X_s el correspondiente campo de vectores. Como X_s es un campo de vectores vertical, se puede definir el operador $I\colon \Omega^k_{\text{fib}}(\nu(P) \to Q) \to \Omega^{k-1}_{\text{fib}}(\nu(P) \to Q)$ a través de la fórmula:

$$I(\rho) = \int_0^1 \tau_s^*(i_{X_s}\rho)ds$$

Al igual que en el caso no paramétrico, si ρ es cerrada y $j^*\rho = 0$ entonces $dI(\rho) = \rho$. También es cierto que I conmuta con cualquier acción que preserve la estructura de $SO(2)$-fibrado.

Corolario 4.5. *Sean ω_1, ω_2 dos formas de Poisson en $\nu(P)$ compatibles con la estructura de fibrado $\nu(P) \to Q$, verificando $j^*\omega_1 = j^*\omega_2$ e induciendo la misma orientación en $\nu(P)$. Existen U_1, U_2 entornos de P en $\nu(P)$ y un isomorfismo $\phi\colon \nu(P) \to \nu(P)$ isotópico a la identidad (rel P) mediante una isotopía con soporte compacto, tal que $\phi\colon U_1 \to U_2$ verifica $\phi^*\omega_2 = \omega_1$. Si ambas forman ya coincidían sobre un compacto C de P, podemos asumir que la isotopía tiene soporte en un entorno preasignado del cierre de $P - C$.*

Es posible elegir el isomorfismo ϕ dependiendo de modo diferenciable de ω_1 y ω_2. De hecho si partimos de dos familias diferenciables $\omega_{1,r}, \omega_{2,r}$, $b \leq r \leq c$ que coinciden en un entorno fijo de un compacto dado C, y construimos isomorfismos (aplicando la construcción que sigue) ϕ_b, ϕ_c verificando $\phi_b^*\omega_{2,b} = \omega_{1,b}$ y $\phi_c^*\omega_{2,c} = \omega_{1,c}$, entonces existe una familia diferenciable ϕ_r que cumple $\phi_r^*\omega_{2,r} = \omega_{1,r}$ en un entorno fijo de P y que coincide con la identidad en el entorno preasignado del cierre de $P - C$.

PRUEBA. Como en la prueba del teorema de Darboux-Weinstein, consideramos la 2-forma vertical $\eta = \omega_1 - \omega_0$ y la familia $\omega_t = \omega_0 + t\eta$ (también 2-formas verticales cerradas).

Es posible encontrar un pequeño entorno de P en el que las ω_t son no degeneradas (porque en P ambas formas inducen la misma orientación en los discos normales y por la compacidad de P). Ahí, sabemos que $\eta = d\alpha$, con $\alpha = I(\eta)$, y por tanto que es posible encontrar una familia (diferenciable) de vectores verticales Y_t caracterizada por la ecuación $i_{Y_t}\omega_t = -\alpha$. Después de usar una función meseta apropiada, esta familia 1-paramétrica define un flujo global Ψ_t en $\nu(P)$ que fija P. Sin más que computar $\frac{d}{dt}(\Psi_t^*\omega_t)$ se concluye que $\Psi_t^*\omega_t$ no depende de t cerca de P.

Si las formas ya coincidían en un entorno de C, η se anulará en dicho entorno.

En cuanto a las familias observamos que en el proceso anterior hay una elección de función meseta, y que es posible unir de modo diferenciable dos elecciones cualesquiera. □

Corolario 4.6. *Sea (M, Λ_M) una variedad de Poisson de dimensión n y rango d. Sea (P, Λ_P) una variedad cerrada de Poisson regular de dimensión $n-2$ que fibra sobre la variedad Q de dimensión $n-d$, y tal que Λ_P es compatible con la estructura de fibrado. Asumamos que $j_a\colon (P, \Lambda_P) \to (M, \Lambda_M)$, $a = 1, 2$, sumerge (P, Λ_P) como subvariedad de Poisson transversal fibrada de (M, Λ_M) (y disjuntas). Supongamos que ambos fibrados normales son triviales, y sea $\psi\colon \nu_1(P) \to \nu_2(P)$ un isomorfismo identificándolos e invirtiendo la orientación de las fibras (si los fibrados son triviales existen de modo automáticos isomorfismo tanto preservando como invirtiendo la orientación de las fibras). Entonces $\#_\psi M$ admite una estructura de Poisson Λ.*

PRUEBA. Podemos identificar cada fibrado normal con $P \times \mathbb{R}^2$ de modo que en cada disco $\{z\} \times D^2$ la forma de área $dx \wedge dy$ es enviada a $dy \wedge dx$. También disponemos de isomorfismos $\hat{j}_a\colon P \times D^2_\epsilon \to V_a$, $a = 1, 2$, y $\tilde{\psi}\colon P \times D^2_\epsilon \to P \times D^2_\epsilon$.

El punto principal es que como ambos fibrados normales son triviales, $j_1^*\omega_1 + dx\wedge dy$ (resp. $j_2^*\omega_2 - dx\wedge dy$) son estructuras de Poisson que restringen a $j_a^*\omega_a$ sobre P. Por tanto, podemos encontrar un número positivo $\delta > 0$, y difeomorfismos $\tilde{j}_a\colon P \times D^2_\delta \to U_a$ con $\tilde{j}_1^*\omega_1 = j_1^*\omega_1 + dx \wedge dy$, $\tilde{\psi}^*\tilde{j}_2^*\omega_2 = j_1^*\omega_1 - dx\wedge dy$, $U_a \subset V_a$ entornos de $j_a(P)$. Componiendo ψ con la aplicación $(r, \theta) \mapsto (\sqrt{\delta^2 - r^2}, \theta)$, que invierte la forma de área en cada fibra y por tanto preserva las formas de Poisson, definimos de modo evidente una estructura de Poisson en $\#_\psi M$. □

En la construcción anterior la estructura de Poisson coincide con Λ_M en $M - (j_1(P) \cup j_2(P))$. Pero será necesario permitir perturbaciones en un entorno de una de las inmersiones para tener unicidad salvo isotopía.

La traba principal para resolver el problema propuesto en el teorema 4.4 es que en general no es posible definir una estructura de Poisson en ν_a inducida por $j_a^*\omega_a$ y la estructura simpléctica de los ortogonales simplécticos, a menos que el fibrado normal sea trivial.

Se puede superar la dificultad anterior como sigue: consideremos ν_a^0, los fibrados de discos de radio $\pi^{-1/2}$, e identifiquemos los discos menos su origen componiendo la aplicación i con ψ para obtener $\mathcal{B}$, un fibrado de esferas S^2 con grupo estructural $SO(2)$ cuyas fibras están dotadas de una forma de área ω_{S^2} invariante por la acción de $SO(2)$, y cuya integral vale 1 en cada una de las esferas.

Tenemos dos inmersiones $i_0 \colon P \to \mathcal{B}$, $i_\infty \colon P \to \mathcal{B}$ con $\hat{j}_1 i_0 = j_1$, $\hat{j}_2 i_\infty = j_2$. Usamos la notación $E^0 = \mathcal{B} - P_\infty$ (resp. $E^\infty = \mathcal{B} - P_0$).

Usando las ideas de Thurston (véase [**41**], teorema 6.3) se construye una 2-forma vertical η cuya restricción a cada fibra el la anterior forma de área: para ello se comienza con una forma β en $q \colon \mathcal{B} \to P$ representando el dual de Poincaré de P_0 y cuya integral en cada fibra es 1 (en cada esfera transversal a P_0). Podemos escogerla con soporte en un pequeño entorno de P_0 de modo que se anule en P_∞. Tomamos trivializaciones $h_k \colon q^{-1}(\mathcal{U}_k) \to \mathcal{U}_k \times S^2$ de $\mathcal{B}$ y una partición de la unidad ρ_k subordinada a $\{\mathcal{U}_k\}$. Como $h_k^* \pi_{S^2}^* \omega_{S^2} - \beta = d\alpha_k$ en $q^{-1}(\mathcal{U}_k)$, $\eta = f(\beta + d\sum_k (\rho_k \circ q)\alpha_k)$, siendo f la aplicación de "olvido" $f \colon \Omega^2(\mathcal{B}) \to \Omega^2_{\mathrm{fib}}(\mathcal{B} \to Q)$, satisface nuestras demandas. El resultado de promediar $\eta - q^* i_0^* \eta$ (ambas q, i_0 son levantamientos de id: $Q \to Q$) bajo la acción de $SO(2)$ es una 2-forma vertical $SO(2)$-invariante, a la que todavía llamaremos η. Dicha forma restringe a la forma de volumen canónica en cada esfera que además verifica $i_0^* \eta = 0$.

Es posible elegir η para que $\eta_{|E^0}$ extienda sobre ν_1 a una 2-forma vertical cerrada que sea simpléctica en los planos (las fibras). Tan sólo necesitamos tomar β con soporte fuera de P_∞, tal que en la intersección de ese entorno con $q^{-1}(\mathcal{U}_i)$ ($\mathcal{U}_i$ contractible) α_k se define como $h_k^* \pi_{S^2}^* \alpha'$, donde α' verifica $d\alpha' = \omega_{S^2}$ en ese entorno. En particular, la restricción de la 1-forma $\alpha = \frac{1}{2}(r^2 - \frac{1}{\pi})d\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ (dada en coordenadas polares) al disco de radio $\pi^{-1/2}$ admite una extensión a una forma α' en $S^2 - \{0\}$ con $d\alpha' = \omega_{S^2}$.

Las formas $\omega_t = q^* j_1^* \omega_1 + t\eta$ son no degeneradas para $0 < t \leq t_1$ ya que, tal y como Thurston ha observado, $q^* j_1^* \omega_1$ es no degenerada en el ortogonal al espacio tangente a las esferas (que no depende de t pues está determinado por η).

Para una elección de η que extienda a ν_1 tal y como acabamos de describir, las formas ω_t serán simplécticas cerca del cierre de $E^0 \cong \nu_i^0$ en ν_1, para $t_1 \leq t$ suficientemente pequeño.

4.5. Comparación de las estructuras de Poisson en $\mathcal{B}, E^0$ E^∞

Una vez definida la familia anterior de 2-formas cerradas no degeneradas en $\mathcal{B}$, quisiéramos comparar una de ellas con aquellas definidas en $E^0 \cong \nu_1^0$ y $E^\infty \cong \nu_2^0$ que provienen de ω_1 y ω_2.

De acuerdo con el corolario 4.5 para cada t podemos encontrar entornos $(\mathcal{W}_0^t, \omega_t)$ de P_0, y $(\mathcal{W}_\infty^t, \omega_t)$ de P_∞, que son Poisson equivalentes a ciertos entornos (dependiendo de t) de $(j_1(P), \omega_1)$ y $(j_2(P), \omega_2)$. Pero nada nos garantiza que para algún valor de t se tenga que $\mathcal{B} = \mathcal{W}_0^t \cup \mathcal{W}_\infty^t$.

Para solventar esto nos inspiramos de nuevo en la construcción de Gompf: en E^0 consideramos $\varphi = I(\eta)$ y se definen los campos de vectores verticales Y_t, $0 < t \leq t_1$ a través de la condición $i_{Y_t}\omega_t = -\varphi$ (también están definidos en un entorno del cierre de si η se eligió con extensión a ν_1). La propiedad crucial es que estos campos de vectores son $SO(2)$-invariantes. Para un t_0 fijo, el flujo Ψ_t, totalmente determinado mediante la condición de que sea la identidad para $t = t_0$, es $SO(2)$-invariante y por supuesto verifica $\Psi_t^* \omega_t = \omega_{t_0}$.

En principio se tiene que para cualquier conjunto compacto $K \in E^0$ que sea $SO(2)$-invariante, existe un intervalo J de t_0 en $(0, t_1]$ en el que el flujo $\Psi \colon K \times J \to E^0$ está definido. Pero se puede demostrar que Ψ está definido en $E^0 \times [t_0, t_1]$. Cualquier punto x en E^0 determina una $SO(2)$-orbita en su fibra y por tanto un disco $D(x)$. Se define:

$$A(x) = \int_{D(x)} \eta$$

y,

$$A_t(x) = \int_{D(x)} \omega_t ,$$

donde se ha hecho "pull-back" de las formas al disco.

La aplicación $A \colon E^0 \to [0, 1)$ es una submersión diferenciable, propia, $SO(2)$-invariante y que verifica $A_t(x) = tA(x)$. Dado $x \in E^0$, $t_0 \in (0, t_1]$ y $K = D(x)$, se obtiene como antes un flujo en $D(x)$. Llamemos $D(\Psi_t(x))$ al disco cuya frontera es la $SO(2)$-orbita de $\Psi_t(x)$ (coincide con $\Psi_t(\partial D(x))$). Se tiene:

$$\begin{aligned} tA(\Psi_t(x)) &= A_t((\Psi_t(x))) = \int_{D(\Psi_t(x))} \omega_t \\ &= \int_{\Psi_t(D(x))} \omega_t = \int_{D(x)} \Psi_t^* \omega_t = \int_{D(x)} \Psi_{t_0}^* \omega_{t_0} = t_0 A(x), \end{aligned}$$

Luego podemos concluir que $A(\Psi_t(x)) = \frac{t_0}{t} A(x)$. Como A, que es propia, disminuye a lo largo de las líneas de flujo (con t aumentando), estas líneas de flujo no pueden abandonar E^0 lo que implica que Ψ está definida en $E^0 \times [t_0, t_1]$. La desigualdad $A(\Psi_{t_1}(x)) < \frac{t_0}{t_1}$ supone que eligiendo t_0 suficientemente pequeño Ψ_{t_1} envía E^0 en un entorno tubular cualquiera prefijado de P_0. En particular escogemos t_0 de modo que $\Psi_{t_1}(E^0) \subset \mathcal{W}_0^{t_1}$. Por tanto $\hat{j}_1 \Psi_{t_1}$ envía (E^0, ω_{t_0}) dentro de $(\hat{j}_1 \Psi_{t_1}(E^0), \omega_1)$. De hecho, para una elección apropiada de η el morfismo de Poisson Ψ_{t_1} extiende a un entorno del cierre de E^0, lo que permite extenderlo a su vez a un difeomorfismo $\Psi_{t_1} : \nu_1 \to \nu_1$ isotópico a la identidad mediante una isotopía con soporte compacto (pero solamente Poisson en un entorno del cierre de $E^0 \cong \nu_1^0$) .

La restricción de cada ω_t a P_∞ induce también una estructura de Poisson, aunque en general $i_\infty^* \omega_t \neq j_2^* \omega_2$. Se puede modificar ω_2 en un entorno de $j_2(P)$ (ω_2 no ha estado involucrada en toda la construcción previa) para que la igualdad anterior sí se de: se toma $\mu \colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ una aplicación $SO(2)$-equivariante levantando $\mathrm{id} \colon P \to P$, tal que μ fija un entorno de P_∞ y colapsa un entorno de P_0 a P_0. La composición de la restricción de $\hat{j}_2^{-1}$ a V_2^0 con μ puede ser extendida a una aplicación λ de un entorno cerrado U_2 de V_2^0 en V_2 (un entorno de ∂U_2 es enviado a P_0). Podemos modificar la estructura de Poisson de $(U_2, \omega_2) \subset (V_2, \omega_2)$ (sin modificar la foliación simpléctica), añadiendo a ω_2 una 2-forma vertical cerrada $= \zeta$ tal que $\omega_2 + \zeta$

es no degenerada (y por tanto Poisson) y ζ se anula en un entorno de ∂U_2 en U_2.

Denotemos $\zeta = \lambda^*\eta$. Existe $t_2 > 0$ (por la compacidad de P) tal que para todo $0 \leq t \leq t_2$, $\tilde{\omega}_M = \omega_2 + t\zeta$ es no degenerada. Para resolver el problema simplemente necesitamos elegir nuestro t_0 previo más pequeño que t_2 (y usar por supuesto $\tilde{\omega}_M = \omega_M + t_0\zeta$).

Por tanto es posible pegar definiendo una forma de Poisson ω en $\tilde{V}$ que satisface todos los requerimientos del teorema 4.4. Siendo más precisos, podemos encontrar una aplicación $\chi\colon E^\infty \to E^\infty$ isotópica a la identidad mediante una isotopía (rel P_∞) con soporte en ν_2^0, y Poisson con respecto a las formas ω_{t_0} y $\omega_M + t_0\zeta$, en un entorno U_∞ de P_∞ (la aplicación admite una extensión a un difeomorfismo de ν_2 isotópico a la identidad). Se pega empleando la aplicación $\hat{j}_2 \circ \chi \circ i \circ \psi \circ \Psi_{t_1}^{-1} \circ \hat{j}_1^{-1}\colon V_1^0 \to V_2^0$, donde interpretamos Ψ_{t_1} y χ como difeomorfismos de los fibrados normales (en vez de tener dominio en el fibrado de esferas $\mathcal{B}$). Las inmersiones que finalmente empleamos son $\hat{j}_1 \circ \Psi_{t_1}$, y modificamos $\hat{j}_2$ componiendo por la derecha con $\chi\colon \nu_2 \to \nu_2$.

La única condición que falta por verificar es que la diferencia $[\omega - \Omega_{\tilde{V}}]$ (que por construcción tiene soporte compacto) es exacta. Como lo podemos demostrar fibra a fibra basta verificar que

$$\langle \omega - \Omega_{\tilde{V}}, F \rangle = 0,\ \forall F \in H^2(\tilde{N}, \mathbb{Z}), \tag{4.13}$$

para todas las fibras $\tilde{N}$ de $\tilde{V} \to Q$. Esta vez no escribimos la demostración de la igualdad (4.13) porque es palabra por palabra el enunciado probado por Gompf ([**24**] pág. 547-548).

En cuanto a la unicidad, si $\omega_t \in H^2_{\text{fib}}(\tilde{V} \to Q)$, $t \in [0,1]$, es una familia diferenciable cualquiera de formas de Poisson tal que $\omega_t - \Omega_{\tilde{V}}$ son exactas y con soporte compacto, las formas $\omega_t - \omega_0$ son exactas en cohomología con soporte compacto (es posible encontrar un compacto común W de $\tilde{V}$ conteniendo todos los soportes). De ello se sigue la posibilidad de encontrar una familia α_t de 1-formas con soporte compacto para las que $\frac{d}{dt}\omega_t = \frac{d}{dt}(\omega_t - \omega_0) = d\alpha_t$, lo que permite aplicar el teorema de Moser [**45**] para mostrar la existencia de una isotopía con soporte en $W \subset \tilde{V}$ que envía mediante pullback la familia inicial a ω_0.

La clase de isotopía de la 2-forma de Poisson construida está totalmente determinada. Una elección diferente de $t \leq t_0$ puede ser absorbida usando la versión parametrizada del corolario 4.5. Igualmente, si en vez de tomar la 2-forma η de la construcción anterior hubiésemos escogido $\hat{\eta}$, la familia $\eta_s = s\eta + (1-s)\hat{\eta}$ es válida para que se le aplique la construcción, y podemos aplicar el mismo corolario a la familia resultante de difeomorfismos $\Psi_{s,t}$. Cualesquiera otras elecciones que se han hecho pueden ser conectadas mediante familias diferenciables, y lo mismo ocurre si cambiamos las inmersiones de los fibrados normales (preservando las foliaciones) o ψ por otros representantes que sean isotópicos a éstos.

No sólo la construcción –a pesar de las diferentes elecciones que se hacen– determina una única clase de isotopía de 2-formas de Poisson, sino que recíprocamente, cualquier 2-forma ω que verifique las cuatro condiciones del enunciado del teorema 4.4 está en la misma clase de isotopía.

Empleamos ψ para recuperar el fibrado de esferas $\mathcal{B}$ y las inmersiones modificadas para definir en $\mathcal{B}$ una 2-forma de Poisson ω_{t_0} que es $SO(2)$-invariante y que coincide con ω_M en V_1^0 y con $\tilde{\omega}_M$ cerca de $j_2(P)$. Notamos que está 2-forma es de nuevo el resultado de aplicar la construcción anterior para $\eta = \frac{1}{t_0}(\omega_{t_0} - q^*\omega_P)$ y $t_1 = t_0$. La SO(2)-invariancia implica que las fibras son ω_{t_0}-ortogonales a P_∞, con lo que η resulta ser no degenerada en las fibras en P_∞. La no degeneración de ω_t en P_∞, $(t \leq t_0)$ se sigue de la condición (3) aplicada primero a TP_∞. Es posible extender η a ν_1 contrayendo la inmersión $\hat{j}_1 \colon \nu_1 \to M$ (rel E^0) si fuera necesario (la no degeneración es una condición abierta). Aplicando la construcción a la inmersión de la condición (2) (contraída (rel E^0) en caso de ser necesario), para tiempo $t = t_0$ se obtiene la misma inmersión ($\Psi_{t_0} = id$) pues la forma inicial ya era Poisson. Lo mismo ocurrirá para la segunda inmersión (la corrección χ en este caso es la identidad), siempre que escojamos la ζ dada que define $\tilde{\omega}_M$, en vez de elegir $\zeta = \lambda^*\eta$. De ello se deduce que la aplicación que realiza el pegado coincide con φ^{-1} cerca de $j_2(P)$.

Existe un problema con la elección de ζ, pues muy bien pudiera no ser de la forma $\lambda^*\eta$, donde λ extiende la restricción de $\hat{j}_2^{-1}$ a V_2^0 (aunque se tiene $j_2^*\zeta = i_\infty\eta$, y se puede asumir que ζ se anula fuera de $\hat{j}_2(\mathcal{B} - P_0) = V_2^0$). Es necesario mostrar que las formas ω y ω', esta última construida usando $\zeta' = \lambda^*\eta$, son isotópicas (mediante una isotopía que fija el complementario de un conjunto compacto en $\tilde{V}$), y esto se reduce a mostrar que las formas construidas usando $\zeta_s = s\zeta' + (1-s)\zeta$ satisfacen la condición 1 del teorema. Exactamente las mismas ideas que usamos para verificar que $\langle \Omega_{\tilde{V}} - \omega, F \rangle = 0$, $\forall F \in H^2(\tilde{N}; \mathbb{Z})$ (véase **[24]** pág. 549), dan el resultado buscado.

5. La clase modular de $\#_\psi M$

Sea (M, Λ_M) una variedad de Poisson que por simplicidad asumimos orientable. Un invariante importante de la estructura de Poisson es la *clase modular* **[57]**. De un modo impreciso podemos describirla como la obstrucción a la existencia de una medida transversal invariante por la acción de todos los campos hamiltonianos.

La clase modular es un campo de vectores que pertenece al primer grupo de la cohomología de Poisson de (M, Λ_M) (véase **[54]**). Para cada forma de volumen μ, un campo de vectores (una derivación) que representa la clase modular queda definido mediante la fórmula:

$$\phi_\mu \colon f \mapsto div_\mu X_f,$$

donde X_f es el vector hamiltoniano asociado a f y div_μ la divergencia con respecto a μ.

Una variedad de Poisson cuya clase de Poisson se anula es llamada *unimodular*. De la expresión anterior se deduce trivialmente que una variedad de Poisson orientable es unimodular si y solamente si existe una forma de volumen invariante por la acción de todos los campos hamiltonianos. Como –al menos en el conjunto regular– toda forma de volumen es el producto exterior de la forma de volumen de Liouville a lo largo de cada hoja (siempre invariante por los campos hamiltonianos) y una forma de volumen transversal, la invariancia de esta forma de volumen transversal es equivalente a la de la forma de volumen total (por ello hemos hablado de la clase modular como la obstrucción a la existencia de una forma de volumen transversal invariante).

Asumamos que $\#_\psi M$ está orientada.

Proposición 5.1. *Si* $(\#_\psi M, \Lambda)$ *unimodular entonces* (M, Λ_M) *también lo es, pero el recíproco no es cierto.*

PRUEBA. Empezamos por observar que si (N, Λ_N) es una variedad de Poisson orientada y U un abierto de N tal que $(U, \Lambda_{N|U})$ es unimodular, entonces (N, Λ_N) será unimodular si alguna de las formas de volumen invariantes en $(U, \Lambda_{N|U})$ admite una extensión a una forma de volumen invariante en (N, Λ_N).

Veremos que también hay ejemplos de variedades (N, Λ_N) unimodulares para las que no todas las formas de volumen invariantes en un determinado abierto extienden a formas de volumen invariantes en (N, Λ_N).

En caso de que (N, Λ_N) sea una variedad de Poisson fibrada y U corte cada hoja en un abierto conexo (no vacío), entonces cualquier forma de volumen en $(U, \Lambda_{N|U})$ extiende a una única forma de volumen invariante en (N, Λ_N) **[57]**. Una consecuencia elemental es que en una variedad de Poisson general (N, Λ_N) si tomamos un cerrado V contenido en un abierto U, tal que U (conexo) está fibrado y V interseca cada fibra en un conjunto no vacío cuyo complementario en la fibra es conexo, entonces (N, Λ_N) es unimodular si y solamente sí $(N - V, \Lambda_{N|N-V})$ es unimodular. Un corolario de esto es que cualquier perturbación del bivector de Poisson en V que preserve la foliación no afecta a la unimodularidad (resp. no unimodularidad) (N, Λ_N).

De lo anterior se deduce que la unimodularidad de $(\#_\psi M, \Lambda)$ implica la de (M, Λ_M).

Si comenzamos con (M, Λ_M) unimodular, al fibrar V_a sobre Q, cualquier forma de volumen en (M, Λ_M) determinará un par de formas de volumen en Q. Es obvio que $(\#_\psi M, \Lambda)$ será unimodular si y solamente si existe una forma de volumen invariante para la que ambas formas inducidas en Q coinciden.

Aunque en general esto no ocurrirá (y acabaremos la prueba de la proposición construyendo contraejemplos), pasamos a describir una situación en la que sí se da esta circunstancia.

Definición 5.2. *Sea* (M, Λ_M), (P, Λ_P) *y* $j_1 \colon (P, \Lambda_P) \to (M, \Lambda_M)$ *como en el teorema 4.4. Asumamos que* $j_1(P)$ *tiene fibrado normal trivial. Una vez fijada una trivialización* ψ *del fibrado normal, podemos aplicar la construcción de cirugía a la unión disjunta de* (M, Λ_M) *con* (M, Λ_M). *Denotamos la variedad correspondiente mediante* $(M\#_\psi M, \Lambda_M\#\Lambda_M)$

Corolario 5.3. *Sea* (M, Λ_M), (P, Λ_P) *como en la definición anterior. Entonces* (M, Λ_M) *es unimodular si y solamente si* $(M\#_\psi M, \Lambda_M\#\Lambda_M)$ *es unimodular.*

Para construir contraejemplos empezamos por probar el siguiente lema:

Lema 5.4. *Existe variedades de Poisson fibradas (de hecho fibrados simplécticos) con abiertos para los que hay formas de volumen invariantes que no extienden a formas de volumen invariantes en toda la variedad.*

PRUEBA. La idea es comenzar con nuestro conjunto abierto fibrado para a continuación identificar varias fibras en una sola (de modo que estaremos imponiendo restricciones sobre la forma de volumen en el espacio base de la que tenemos que hacer pull-back).

Consideramos la variedad de Poisson fibrada $S^{2n-1} \times D^2 \to S^{2n-1}$, donde D^2 es el correspondiente disco cerrado unidad con su forma simpléctica usual (téngase en mente el caso $n = 1$). Para cada punto de S^{2n-1} consideramos su imagen mediante la aplicación antipodal e identificamos las fronteras de los discos correspondientes vía una reflexión (digamos, en el eje y) $r_y \colon S^1 \to S^1$. La variedad resultante es un fibrado simpléctico sobre $\mathbb{RP}^{2n-1}$ con fibra la esfera con su forma de área usual (otro modo de construirlo es considerar $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, tomar un entorno tubular cerrado de radio fijo de $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, identificar su frontera empleando la aplicación antipodal, y finalmente reescalar la forma de área). Si borramos los ecuadores de todas las fibras obtenemos el fibrado de discos iniciales. En este subconjunto abierto las formas de volumen invariantes provienen de formas en S^{2n-1}, pero sólo aquellas invariantes por la aplicación antipodal en S^{2n-1} extienden a formas de volumen invariantes en toda la variedad.

Existe un tercer modo de construir estas variedades comenzando por la variedad de Poisson final, y que además nos da muchos más ejemplos: elegimos $(Q, G, (F, \omega), \rho)$ donde Q es una variedad compacta, G es un subgrupo normal de $\pi_1(Q)$ de índice finito y ρ es una representación de $K = \pi_1(Q)/G$ en el grupo de simplectomorfismos de (F, ω) tal que hay puntos en F con estabilizadores triviales. Q_G, la cubierta de Q asociada al subgrupo G es un fibrado con grupo estructural K, y podemos construir el fibrado asociado a la representación ρ por simplectomorfismos. La variedad resultante M es un fibrado simpléctico y por tanto una variedad de Poisson; como fibrado, al tener grupo estructural finito posee la *propiedad de levantamiento único.* Fijamos un punto base x_0 de Q y un punto z en la fibra sobre x_0 con estabilizador trivial. El levantamiento comenzando en z de todas las clases de caminos $\pi_1(Q, x_0)$ da una inmersión de Q_G en M (transversal a las fibras). En la fibra sobre x_0, los puntos próximos a z tienen estabilizador trivial lo que implica que el fibrado normal a la inmersión de Q_G es trivial. Podemos incluso tomar un entorno tubular que sea el resultado de empujar un pequeño disco en la fibra centrado en z usando la propiedad de levantamiento único trivial, lo que da un subfibrado simpléctico. Es evidente que las formas de volumen invariantes en este pequeño entorno tubular de Q_G que extienden a formas de volumen invariantes en toda la variedad son aquellas que provienen de formas de volumen en Q_G invariantes por la acción de K. □

Ahora ya estamos en condiciones de probar la proposición 5.1:

Para construir el contraejemplo empezamos con dos copias de las fibraciones simplécticas $(Q, G, (F, \omega), \rho) \to Q$ del lema 5.4 (con F una superficie) y consideramos en ambas la misma inmersión de Q_G. A continuación se fija una forma de volumen μ en Q_G que desciende a Q. Escogemos un punto $z \in Q_G$ y consideramos un difeomorfismo $f : Q_G \to Q_G$ homotópico a la identidad (rel z) que sea la identidad en los restantes puntos de la órbita de z (por la acción de K) y que no preserve μ en z. Identificamos ambas inmersiones de Q_G en M a través de f y hacemos suma conexa normal usando cualquier "framing" ψ para así obtener una variedad que no es unimodular. Si lo fuese, una forma de volumen invariante induciría una forma de volumen $e^h\mu$ en Q_G invariante tanto por la acción de K como por la acción de K conjugada con f, pero esto no puede ocurrir en el punto z. □

6. Variedades de Poisson con grupos fundamentales arbitrarios

Usando los resultados previos es posible probar el teorema para variedades de Poisson regulares enunciado en la introducción, y que extiende un resultado fundamental de Gompf.

Prueba del teorema 1.2. Como ya comentamos en la introducción tan sólo es necesario probar el caso $n = 5$, $d = 4$, ya que el caso par es consecuencia del trabajo de Gompf (multiplicando sus variedades simplécticas por esferas de la dimensión apropiada), y el los impares de dimensiones mayores se siguen de multiplicar el de dimensión 5 por variedades simplemente conexas de la dimensión apropiada.

En primer lugar es útil recordar la prueba de Gomfp: comenzamos con una 4-variedad simpléctica cerrada $T^2 \times \Sigma_g$ tal que G se obtiene colapsando ciertos caminos del grupo fundamental (añadiendo relaciones). La forma simpléctica se elige para que estos caminos sean curvas simples de determinados toros simplécticos sumergidos. El punto crucial es que las variedades que se pegan a lo largo de estos toros sumergidos (mediante suma conexa normal) son superficies elípticas racionales (a lo largo de una de sus fibras regulares), y el grupo fundamental de la variedad resultante, que no depende de la elección de "framing", es el inicial con la homotopía de estos toros anulada.

Es conveniente recordar cómo es la topología de estas variedades elípticas racionales. Son difeomorfas a $\mathbb{CP}^2 \overset{9}{\#} (-\mathbb{CP}^2)$ y un modelo se puede construir explotando nueve puntos en $\mathbb{CP}^2$ en posición general (donde dos cúbicas genéricas se cortan). Se obtiene así una fibración $p\colon \mathbb{CP}^2 \overset{9}{\#} (-\mathbb{CP}^2) \to \mathbb{CP}^1$ cuyas fibras son el pincel de cúbicas generado por las dos dadas (un pincel de Lefschetz holomorfo). La fibra genérica es una cúbica diferenciable (topológicamente un toro) y también se tienen 12 fibras singulares que topológicamente son esferas con un punto de auto-intersección (el resultado de colapsar una curva regular que no separa en la fibra genérica). Es fácil comprobar que el complemento de una fibra regular es simplemente conexo: de un modo impreciso, el complemento fibra sobre un disco por lo que sólo hay que ocuparse de la fibra. Siguiendo la descripción de R. Kirby en **[33]**, se ve que dicho complemento se puede construir comenzando con $D^2 \times T^2$, $T^2 = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$; extender la fibración a un disco mayor (en $\mathbb{CP}^1$) que contenga una fibra singular equivale a pegar una 2-asa (con un determinado "framing") sobre uno de los dos generadores a o b (hay 12, y 6 de las cirugías se hacen sobre a y las otras 6 sobre b). El último paso es pegar un entorno de la fibra regular sobre $\infty \in \mathbb{CP}^1$. Por tanto cualquier camino contenido en una fibra es trivial en $p^{-1}(\mathbb{CP}^1 - \{0, \infty\})$.

La construcción de la 5-variedad de Poisson M con $\pi_1(M) \cong G$ comienza con la elección de una de las 4-variedades simplécticas de Gompf (M_G, ω_{M_G}) con $\pi_1(M_G) = G$. Podemos asumir que $M_G = N_G \# \mathbb{CP}^2 \overset{9}{\#} (-\mathbb{CP}^2)$ y que la fibra eliminada es $p^{-1}(\infty)$.

En un primer momento consideramos $M_1 = M_G \times S^1$ con la estructura de Poisson producto (la 2-forma vertical $p_1^*\omega_{M_G}$, a la que denominamos ω_{M_G}). En M_G la fibra $p^{-1}(0) = T$ es un toro simpléctico sumergido trivialmente (con fibrado normal trivial) con forma simpléctica ω_0. Sea $M_2 = T \times S^3$ con la estructura de Poisson producto –con factores ω_0 y la estructura de Poisson de S^3 determinada por la foliación de Reeb y la forma de volumen usual– y sea $k \subset S^3$ el nudo trivial, que es una subvariedad de Poisson de S^3 transversal a la foliación.

Las variedades de Poisson $P_1 = T \times S^1 \subset M_1$, $P_2 = T \times k \subset M_2$, son ambas subvariedades de Poisson transversales fibradas sumergidas trivialmente. Cualquier identificación de k con el factor S^1 de P_1 identifica P_1 y P_2 como variedades de Poisson. Cualquier identificación entre sus fibrados normales nos permitirá construir la correspondiente suma normal conexa. En esta situación particular disponemos de "framings" canónicos; el de P_1 proviene de la proyección $p\colon \mathbb{CP}^2 \overset{9}{\#} (-\mathbb{CP}^2) \to \mathbb{CP}^1$ y el de P_2 del framing $\mathbf{0}$ del nudo trivial. Si usamos este "framing" y $\{a, b, s\}$ como base de $H_3(T \times S^1; \mathbb{Z})$ (la elección de s depende de la orientación elegida para M_1), cualquier otro "framing" vendrá dado por una terna $(l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{Z}^3$. Denotaremos la correspondiente variedad de Poisson mediante $M_1 \#_{(l_1,l_2,l_3)} M_2$.

El cómputo del grupo fundamental de dichas variedades es mera rutina, pero lo describiremos porque estas no son exactamente las variedades que buscamos. Como siempre en estos casos se aplica el teorema de Seifert-Van Kampen:

Denotamos mediante D_1 al disco unidad contenido en en $\mathbb{CP}^1$ y tomamos $W_2 = k \times D_2$ un pequeño entorno tubular de k en S^3. Sean $V_1 = p^{-1}(D^1) \times S^1$, $V_2 = T \times W_2$. Se tiene $M_1 - V_1 = (M_G - p^{-1}(D_1)) \times S^1$, y $\pi_1(M_G - p^{-1}(D_1))$ tiene los mismos generadores que $\pi_1(M_G)$ y las mismas relaciones, excepto la que asegura que el camino $\hat{\alpha}$, un levantamiento de $\alpha = \partial D_1$, es trivial. $\pi_1(M_2 - V_2)$ es el grupo libre generado por a, b y por el camino $\beta = \partial \bar{D}_2$ generando la homotopía de $S^3 - W_2$. Se sigue que el camino s generando la homotopía de S^1 en $(M_G - V_1) \times S^1$ va a una curva isotópica a $k + l_3\beta$. Las curvas $a, b \subset T \times \{x\} \subset M_2 - V_2$ se ven como las curvas simples correspondientes generando la homología de una fibra sobre un punto en ∂D_1, más algún múltiplo de $\hat{\alpha}$. Por último, los caminos $\hat{\alpha}$ y β se identifican.

Es probable que la variedad que hemos construido no tenga el grupo fundamental que buscábamos pues nada nos asegura que $\hat{\alpha}$ sea contractible, pero en cualquier caso hemos convertido el problema de "matar" el generador de la homotopía de S^1 en $M_G \times S^1$, en un problema que supone "matar" la homotopía generada por una curva en una variedad cuya topología conocemos muy bien.

Sea T_2 el toro en M_G generado por los caminos $\hat{\alpha} + a, b$. T_2 es un toro simpléctico trivialmente sumergido (podemos asumir que la estructura simpléctica en $p^{-1}(0) \times D^2_{1+\epsilon}$ es la estructura producto). Al aplicar la suma conexa normal para variedades simplécticas a M_G y a una superficie elíptica regular –a lo largo de T_2 y una fibra regular– se obtiene una variedad simpléctica $\tilde{M}_G$. Es obvio que $\pi_1(\tilde{M}_G) = \pi_1(M_G)$, pero en $\tilde{M}_G$ tenemos además un disco contenido en $\tilde{M}_G - p^{-1}(D_1)$ cuya frontera es $\hat{\alpha}$.

Si hacemos suma conexa normal de $\tilde{M}_G \times S^1$ y $T \times S^3$ a lo largo de P_1 y P_2 ($T = p^{-1}(0)$ está por supuesto en $\tilde{M}_G$), obtenemos una variedad de Poisson $\tilde{M}_1 \#_{(l_1,l_2,l_3)} M_2$ verificando $\pi_1(\tilde{M}_1 \#_{(l_1,l_2,l_3)} M_2) \cong G$.

Es interesante mencionar que el tipo de difeomorfismo de $\tilde{M}_1 \#_{(l_1,l_2,l_3)} M_2$ depende a lo sumo de l_3. Basta observar que $M_2 - V_2$ es un entorno tubular de $T \times \hat{\beta}$, donde $\hat{\beta}$ es un camino en el interior de $M_2 - V_2$ isotópico a β, por lo que $\partial(M_2 - V_2)$ tiene una estructura de S^1-fibrado (sobre $T \times \hat{\beta}$). Por ello el tipo de difeomorfismo de la suma conexa normal está totalmente determinado por la imagen en $\partial(\tilde{M}_1 - V_1)$ de la estructura de S^1-fibrado de $\partial(M_2 - V_2)$ (ya que $\tilde{M}_1 \#_{(l_1,l_2,l_3)} M_2$ es el resultado de colapsar a un punto las fibras de la fibración descrita), y estas fibraciones están clasificadas por el valor de l_3 (el autor no sabe si diferentes valores de l_3 dan lugar a variedades con diferente tipo de difeomorfía).

Si en vez de emplearse superficies elípticas racionales se emplean superficies de Kummer en la construcción de $\tilde{M}_G$, tanto $\tilde{M}_1$ como M_2 admiten estructuras spin. Para cualquiera de estas estructuras, como $H^2(P_i; \mathbb{Z})$ no tiene torsión, es posible encontrar enteros $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ tal que $\tilde{M}_1 \#_{(\bar{l}_1,\bar{l}_2,\bar{l}_3)} M_2$ admite una estructura spin extendiendo a las de los dos bloques. □

Observación 6.1: En las variedades de dimensión 5-construidas hay 3 clases de hojas simplécticas: una familia parametrizada por S^1 de hojas difeomorfas a $\tilde{M}_G - T_1$ y cuyo grupo fundamental es por tanto G; otra familia parametrizada por S^1 de hojas difeomorfas a $\mathbb{R}^2 \times T_1$. Ambas familias llenan abiertos conexos separados por una hoja compacta $T_1 \times T$, donde T es el toro que separa en la foliación de Reeb de S^3. Cualquiera de las hojas abiertas tiene a la cerrada como conjunto de puntos de acumulación.

7. Una aplicación para la construcción de foliaciones calibradas

La suma conexa normal de dos variedades de Poisson calibradas es una variedad de Poisson regular con hojas de codimensión 1. La existencia de un levantamiento a una estructura calibrada se puede estudiar a través de una sucesión espectral. En nuestro caso, vamos a dar condiciones suficientes y una construcción efectiva de dicho levantamiento.

Teorema 7.1. *Sean $(M_a^{2n+1}, \mathcal{F}_a, \omega_a)$, $a = 1, 2$, dos foliaciones calibradas de tipo entero. Sea (P^{2n-1}, Λ_P) una variedad de Poisson fibrada sobre S^1 (fibras conexas) para la que se tienen dos inmersiones $i_a \colon P \to M_a$, $a = 1, 2$, como subvariedad transversal fibrada de Poisson de $(M_a^{2n+1}, \mathcal{F}_a, \Lambda_a)$, y tal que se cumple:*

(1) *$H^2(P; \mathbb{Z})$ no tiene torsión.*
(2) *Los fibrados normales de las inmersiones, $\nu_a(P)$, son triviales.*
(3) *Las 2-formas positivas $\omega_{P,a} = i_a^* \omega_a$ definen la misma clase de cohomología en $H^2(P; \mathbb{Z})$ (ya sabíamos que definían la misma 2-forma foliada).*

Entonces, para ciertas elecciones de isomorfismo φ existen estructuras de Poisson Λ definidas en la suma normal conexa $M_1 \#_\varphi M_2$ que admiten levantamientos a una estructura calibrada de tipo entero ω.

Prueba. Recordemos que al ser los fibrados normales de las inmersiones triviales, la cirugía puede realizarse sin perturbar las 2-formas foliadas. Si aplicamos el teorema 4.4 sin modificar las estructuras obtenemos Λ, una 2-forma foliada cerrada y no degenerada en $M_1 \#_\varphi M_2$.

Queremos definir el levantamiento ω como i por là curvatura de un cierto fibrado de línea hermitiano con conexión, cuya elección es obvia a la luz de las condiciones impuestas.

Tomemos un levantamiento entero de ω_a y una elección (L_a, ∇_a) de fibrado de línea con conexión hermitiana cumpliendo $iF_a = \omega_a$.

Los pullbacks $L_{P,a} = i_a^* L_a$ son fibrados isomorfos ya que para ambos las curvaturas $\omega_{P,a}$ definen la misma clase de cohomología real (condición (3)), y al no haber torsión en $H^2(P; \mathbb{Z})$ los fibrados $L_{P,a}$ son representantes de la única clase de isomorfía de fibrados de línea hermitianos con conexión asociada a la clase de cohomología $[\omega_{P,1}] = [\omega_{P,2}]$.

El isomorfismo local que define $M_1 \#_\varphi M_2$ identifica un abierto A_1, que es un entorno tubular de $i_1(P)$ menos la subvariedad (la sección cero del fibrado normal), con A_2, otro entorno tubular de $i_2(P)$ menos la sección cero, de modo que cuando nos aproximamos a $j_1(P)$ por A_1 estamos alejándonos de $j_2(P)$ en A_2.

Queremos demostrar que la identificación $\varphi\colon A_1 \to A_2$ admite un levantamiento a un isomorfismo de fibrados $\Psi\colon L_{1|A_1} \to L_{2|A_2}$. La existencia de dicho levantamiento se sigue de que $L_{P,1}$ y $L_{P,2}$ son fibrados de línea hermitianos isomorfos.

En efecto, podemos pensar en los anillos como en familias $S_{a,t}$, $t \in (1,0)$ de fibrados triviales de círculos sobre $j_a(P)$ tal que φ envía $S_{1,t}$ a $S_{2,1-t}$. La restricción a $S_{a,t} = S^1 \times j_a(P)$ de L_a es isomorfa al pullback de $L_{P,a}$ mediante $p_2\colon S^1 \times j_a(P) \to j_a(P)$. Por tanto estas restricciones son isomorfas. Fijemos Ψ uno de esos isomorfismos de fibrados.

El fibrado hermitiano $L_1 \#_\Psi L_2 \to M_1 \#_\varphi M_2$ admite dos conexiones compatibles ∇_1 y ∇_2 que sólo están parcialmente definidas. Éstas se solapan por ejemplo en el anillo $A_1 \subset M_1 \#_\varphi M_2$. Sea β una función meseta en $M_1 \#_\varphi M_2$ que se anula en $M_1 - A_1$, comienza a crecer un poquito después de entrar en el anillo, alcanza el valor 1 antes de abandonarlo y lo mantiene en $M_2 - A_2$. Llamemos $\bar{A}_1 \subset A_1$ a los puntos donde su valor es distinto de 0 y 1. Un primer intento sería considerar la conexión compatible $\beta\nabla_1 + (1-\beta)\nabla_2$. Su curvatura multiplicada por i da lugar a una 2-forma cerrada. Claramente coincide con $\omega_1 \coprod \omega_2$ en el complemento de $\bar{A}_1$. Sobre este segundo anillo quisiéramos que su curvatura a lo largo de las hojas coincidiese con $\beta F_1 + (1-\beta)F_2 = -i\Lambda$. Esto no es cierto en general porque en A_1 se tiene $\nabla_1 = \nabla_2 + B$, donde B es en principio una 1-forma a valores complejos no nula.

En vez de intentar definir una nueva identificación Ψ, modificamos la conexión ∇_2 globalmente en M_2.

Como ∇_1 es compatible, $B = iC$, donde C es una 1-forma a valores reales. Consideramos la restricción del fibrado y conexiones a las hojas simplécticas de A_1. La 1-forma foliada $C_{|\mathcal{F}_1}$ es exacta ya que $\omega_{2|\mathcal{F}_1} + idC_{|\mathcal{F}_1}$ –la curvatura foliada de (L_2, ∇_2) pensado como fibrado sobre A_1 tras la identificación– es $\Lambda = \omega_{1|\mathcal{F}_1} = \omega_{2|\mathcal{F}_2}$ en A_1.

Por tanto es posible encontrar en cada hoja una función potencial para $C_{|\mathcal{F}_1}$. Es fácil hacer una elección en cada hoja de modo que el resultado sea una función diferenciable en A_1. Por ejemplo tomamos una "sección" $\tilde{P}$ de A_1 (una copia de P que corta a cada hoja de A_1 una vez), y escogemos la única función f que se anula en $\tilde{P}$. El siguiente paso es extender f, definida en principio en un subconjunto de M_2, a una función g definida en todo M_2. Probablemente es necesario modificarla en los puntos cercanos a $j_2(P)$, y lo hacemos de modo que $g_{|\bar{A}_1} = f$.

En L_2 definimos la conexión compatible $\tilde{\nabla}_2 = \nabla_2 - idg$. Es evidente que $\nabla = \beta\nabla_1 + (1-\beta)\tilde{\nabla}_2$ es una conexión compatible en $L_1 \#_\Psi L_2$ cuya curvatura foliada coincide con $-i\Lambda$.

$\omega := iF_\nabla$ es la 2-forma cerrada que calibra la foliación de $M_1 \#_\varphi M_2$ y cuya restricción a las hojas coincide con Λ.

□

CAPÍTULO III

Clasificación global de multivectores genéricos de grado máximo

1. Introducción

La reciente clasificación por O. Radko [**51**] de las estructuras de Poisson genéricas en superficies orientadas, suscita al cuestión de hasta que punto es posible extender estos resultados a dimensiones superiores.

Esta clasificación –aunque está descrita en el lenguaje de la geometría de Poisson– se basa en resultados clásicos de topología diferencial y en la clasificación de formas de área en superficies cerradas. La razón es que en dimensión 2 la condición de integrabilidad que un campo de bivectores ha de cumplir para definir una estructura de Poisson, se satisface trivialmente. Así para estructuras de Poisson en una superficie orientada Σ, el delicado problema de clasificar soluciones de una ecuación en derivadas parciales no lineal se reduce a la clasificación de secciones (genéricas) del fibrado trivial $\mathfrak{X}^2(\Sigma) \equiv \Gamma(\wedge^2(T\Sigma))$. En esta situación se dispone de todas la herramientas de la geometría diferencial y el problema se simplifica enormemente.

En este capítulo demostraremos que la clasificación de Radko se puede extender a dimensiones superiores para campo de multivectores genéricos de grado máximo.

Un campo de bivectores en una superficie es una estructura de Poisson de grado máximo. Más generalmente, un campo de multivectores de grado máximo es una *estructura de Nambu* de grado máximo.

Las estructuras de Nambu son generalizaciones naturales de las estructuras de Poisson: una *estructura de Nambu* de grado r en una variedad M es un corchete antisimétrico r-multilineal,

$$\{\cdot,\dots,\cdot\}\colon \underbrace{C^\infty(M)\times\cdots\times C^\infty(M)}_{r} \to C^\infty(M),$$

que satisface la regla de Leibniz en cada entrada, y una Identidad Fundamental que extiende de modo natural a la identidad de Jacobi. Para estructuras de grado máximo dicha Identidad Fundamental es vacía.

A pesar de la similitud formal entre estructuras de Nambu y de Poisson, para $r > 2$ la Identidad Fundamental impone condiciones mucho más restrictivas que las que se esperarían de la identidad de Jacobi. Dicho de otro modo, las estructuras de Nambu son de algún modo más complicadas de encontrar que las de Poisson. Como contrapartida las estructuras de Nambu son más fáciles de describir.

Estamos interesados en estructuras de Nambu de grado máximo genéricas en una variedad compacta orientable M. Por la regla de Leibniz dicha estructura viene descrita por un campo de multivectores $\Lambda \in \mathfrak{X}^{\mathrm{top}}(M)$, y la genericidad significa que Λ corta transversalmente la sección $\mathbf{0}$ del fibrado de línea trivial $\wedge^{\mathrm{top}}TM$. En particular el lugar de ceros $\mathcal{H}$ del campo de multivectores Λ es una hipersuperficie de M. Mostraremos como asignar a cada componente conexa H^i de $\mathcal{H}$ un invariante numérico, llamado el *periodo modular*, que depende solamente del germen de Λ en H^i. También construiremos un invariante global, *el volumen de Liouville generalizado*, que mide la razón entre los volúmenes de las diferentes componentes conexas del complemento de $\mathcal{H}$. Estas nociones generalizan las correspondientes para 2-variedades de Poisson.

Nuestro principal resultado es el siguiente:

Teorema 1.1. *Una estructura de Nambu genérica $\Lambda \in \mathfrak{X}^{top}(M)$ está determinada, salvo difeomorfismo preservando la orientación, por el tipo de difeomorfismo del par orientado $(M, \mathcal{H})$ junto con sus periodos modulares y volumen de Liouville generalizado.*

En dimensión 2 este resultado recupera la clasificación de **[51]**.

Usando el teorema 1.1 daremos una descripción el grupo de cohomología de Nambu $H^2_\Lambda(M)$ que determina las deformaciones infinitesimales de la estructura de Nambu. Asimismo probaremos que para dimensiones mayores que 2 el grupo de cohomología de Nambu $H^1_\Lambda(M)$, que determina los automorfismos externo de la estructura, es de dimensión infinita.

El esquema del capítulo es como sigue. En la sección 1 recordamos la definición de una variedad de Nambu de grado r (definición 2.1) y citamos algunas de sus propiedades más importantes.

Introducimos las estructuras de Nambu genéricas de grado n en una n-variedad orientada (definición 3.1) en la sección segunda. Se define, para cada hipersuperficie H en el lugar de ceros del campo de n-vectores Λ, un par de invariantes equivalentes. Son el campo modular de $(n-1)$-vectores X^H_Λ (definición 3.2) y la $(n-1)$-forma modular Ω^H_Λ, que son dos modos equivalentes de describir la linealización de Λ a lo largo de H.

En la sección 3 introducimos el periodo modular T^H_Λ, que es la integral (o la clase de cohomología) de la $(n-1)$-forma y depende solamente de los valores de Λ en un entorno tubular de H. Recíprocamente, podemos recuperar la estructura de Nambu en un entorno tubular de la hipersuperficie orientada (H, Ω^H_Λ) una vez que el periodo modular T^H_Λ ha sido fijado (proposición 4.4).

La prueba del resultado principal se da en la sección 4 (teorema 5.2), donde también se introduce el volumen regularizado de Liouville.

En la sección 5 entre las posibles teorías de cohomología que se pueden asociar a la estructura de Nambu, se considera (i) el grupo de automorfismos exteriores infinitesimales y (ii) el grupo de deformaciones infinitesimales de la estructura. El último resultará tener tantos generadores como el número de invariantes citados, y exhibiremos un conjunto explícito de generadores que extiende el dado para 2-variedades de Poisson (teorema 6.1). Por otro lado mostraremos que el primer grupo de cohomología es de dimensión infinita para $n \geq 3$, algo esperado a la luz de los cómputos locales de estos grupos presentados en [**44**]; también recuperaremos de modo elemental ciertos cálculos de cohomología de Poisson para superficies.

Por último, en la sección 6 observaremos que la correspondencia entre clases de isotopía de bivectores genéricos en S^2 y clases de isomorfía de árboles con pesos y signos dada en [**51**], también se verifica para aquellas estructuras genéricas de Nambu en S^n cuyo lugar de ceros $\mathcal{H}$ sólo contiene esferas (proposición 7.5).

2. Estructuras de Nambu

Las variedades de Poisson $(M, \{\cdot,\cdot\})$ son los espacios de fase relevantes para la mecánica hamiltoniana. En un sistema hamiltoniano la evolución de cualquier observable $f \in C^\infty(M)$ se obtiene resolviendo la e.d.o.

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\},$$

donde $H \in C^\infty(M)$ es el hamiltoniano, una cantidad conservada para el sistema (la "energía").

En 1973 Nambu [48] propuso una generalización de la mecánica hamiltoniana basada en un corchete n-ario. La dinámica de un observable $f \in C^\infty(M)$ vendría gobernada por la e.d.o. análoga

$$\frac{df}{dt} = \{H_1, ..., H_{n-1}, f\},$$

asociada a $n-1$ hamiltonianos $H_1, ..., H_{n-1}$, teniendo por tanto $n-1$ cantidades conservadas.

Para que se tuviesen las propiedades dinámicas "esperadas" este corchete tenía que satisfacer determinadas restricciones que fueron clarificadas por Takhtajan [**53**], quién dio la siguiente definición axiomática de una estructura de Nambu.

Definición 2.1. *Una estructura de Nambu de grado r en una variedad M^n, con $r \leq n$, es un corchete r-multilineal y antisimétrico,*

$$\{\cdot, \dots, \cdot\}\colon \underbrace{C^\infty(M) \times \cdots \times C^\infty(M)}_{r} \to C^\infty(M),$$

satisfaciendo:

(i) *La regla de Leibniz:*

$$\{fg, f_1, \dots, f_{r-1}\} = f\{g, f_1, \dots, f_{r-1}\} + \{f, f_1, \dots, f_{r-1}\}g,$$

(ii) *La Identidad Fundamental:*

$$\{f_1, \dots, f_{r-1}, \{g_1, \dots, g_r\}\} = \sum_{i=1}^{r} \{g_1, \dots, \{f_1, \dots, f_{r_1}, g_i\}, \dots, g_n\};$$

La regla de Liebniz muestra que el operador $X_{f_1,\dots,f_{r-1}} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ que se asocia a $r-1$ funciones $f_1, \dots, f_{r-1}$ mediante

$$X_{f_1,\dots,f_{r-1}}(g) = \{g, f_1, \dots, f_{r-1}\},$$

es una derivación y por tanto un campo de vectores. Es el llamado *campo de vectores hamiltoniano* asociado a $f_1, \dots, f_r$. Más generalmente, de la identidad de Liebniz se infiere la existencia de un campo de r-vectores $\Lambda \in \mathfrak{X}^r(M)$ tal que

$$\Lambda(df_1 \wedge \cdots \wedge df_r) = \{f_1, \dots, f_r\}.$$

Por otro lado, la Identidad Fundamental es equivalente al hecho de que el flujo de cualquier campo de vectores hamiltoniano $X_{f_1,\dots,f_{r-1}}$ es una transformación canónica, i.e., preserva el corchete de Nambu. La correspondiente versión infinitesimal es

$$\mathcal{L}_{X_{f_1,\dots,f_{r-1}}} \Lambda = 0.$$

Obviamente, para estructuras de Nambu de grado máximo la Identidad Fundamental se cumple trivialmente.

EJEMPLO 2.2: En $\mathbb{R}^n$ existe una estructura de Nambu canónica de grado máximo que generaliza la estructura de Poisson canónica en $\mathbb{R}^2$. El corchete de Nambu asigna a n funciones $f_1, \dots, f_n$ el Jacobiano de la aplicación $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$, tal que

$$\{f_1, \dots, f_n\} = \det \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right].$$

Más generalmente cualquier forma de volumen $\mu \in \Omega^{\mathrm{top}}(M)$ en una variedad M determina una estructura de Nambu: si $(x^1, \dots, x^n)$ son coordenadas en M para las que $\mu = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, entonces el tensor de Nambu es

$$\Lambda \approxeq \frac{1}{\mu} = \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

La Identidad Fundamental para $r > 2$ es de una naturaleza mucho más restrictiva de lo que cabría esperar atendiendo a lo que ocurre para $r = 2$, donde se reduce a la identidad de Jacobi; si $r > 2$, además de requerir la verificación de un sistema de primer orden de ecuaciones en derivadas parciales cuadráticas, los coeficientes *necesariamente tienen* que cumplir un determinado sistema de ecuaciones algebraicas cuadráticas. Por ejemplo si M es un espacio vectorial, para un r-vector constante el sistema de ecuaciones diferenciales se verifica trivialmente, mientras que las relaciones algebraicas son no triviales y de hecho coinciden con las ecuaciones de Plücker. Por lo tanto tan sólo los r-vectores descomponibles definen estructuras de Nambu constantes.

Otro ejemplo de la rigidez es la siguiente proposición, ya bien conocida (véase **[53]**):

Proposición 2.3. *Sea Λ una estructura de Nambu. Para cualquier función $f \in C^\infty(M)$ la contracción $i_{df}\Lambda$ también define una estructura de Nambu.*

Esta rigidez hace que sea más complicado "encontrar" estructuras de Nambu que de Poisson, pero también que su descripción sea más sencilla. De ahora en adelante asumiremos que r es mayor que 2 si $n \geq 3$.

En primer lugar, los campos de vectores hamiltonianos generan una foliación generalizada cuyas hojas son o bien puntos, llamados *puntos singulares*, o bien tiene dimensión igual al grado de la estructura. Alrededor de estos *puntos regulares* se tiene la siguiente forma canónica para la estructura de Nambu (véase por ejemplo [**55**]):

Proposición 2.4. *Sea $x_0 \in M$ un punto regular de una estructura de Nambu Λ de grado r. Existen coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^n)$ centradas en x_0 para las que*

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^r}.$$

Para los puntos singulares existen algunos resultados profundos de linealización debidos a Dufour y Zung [**16**].

3. Estructuras genéricas de grado máximo

En esta sección consideramos estructuras de Nambu de grado n en una variedad M de dimensión n, orientable y compacta. Recuérdese que en esta situación la Identidad Fundamental se verifica trivialmente, por lo que una estructura de Nambu es simplemente un campo de multivectores $\Lambda \in \mathfrak{X}^n(M)$. Solamente trataremos con estructuras de Nambu (de grado máximo) genéricas:

Definición 3.1. *Una estructura de Nambu $\Lambda \in \mathfrak{X}^n(M)$ se dice genérica si corta a la sección $\mathbf{0}$ del fibrado de línea $\wedge^n TM$ de modo transversal.*

Las secciones genéricas forman un abierto denso en la topología de Whitney C^∞.

Fijemos de ahora en adelante una sección genérica $\Lambda \in \mathfrak{X}^n(M)$. Su conjunto de ceros, que denotamos mediante $\mathcal{H}$, es la unión de un número finito de hipersuperficies conexas: $\mathcal{H} = \bigcup_{i \in I} H^i$, $\#I < \infty$. Escojamos una y llamémosla H.

Sobre los puntos de H tenemos una cierta información de carácter lineal asociada a Λ; nos referimos a la derivada intrínseca $d\Lambda^H \in T^*_H M \otimes \wedge^n TM$. Se puede definir como $d\Lambda^H \equiv \nabla \Lambda_{|H}$, donde ∇ es cualquier conexión lineal en $\wedge^n TM$. El resultado es independiente de la conexión elegida (pues todas ellas son tangentes a la sección $\mathbf{0}$). La derivada intrínseca da la linealización de la estructura de Nambu en H: si vemos Λ como una sección, es el espacio tangente al grafo de Λ. Es importante hacer notar que $d\Lambda^H$ nunca se anula debido a que hemos asumido transversalidad.

$d\Lambda^H$ es una sección de $T_H^* M \otimes \wedge^n TM$, pero debido a la especial naturaleza de nuestro fibrado de línea (trivial) tiene dos interpretaciones equivalentes que pasamos a explicar:

Fijemos una forma de volumen Ω en un entorno de H en M, de modo que $d\Lambda^H \otimes \Omega \in T_H^* M$.

Definición 3.2. *El campo modular de $(n-1)$-vectores de Λ a lo largo de H es el único campo de $(n-1)$-vectores $X_\Lambda^H \in \mathfrak{X}^{n-1}(H)$ tal que $i_{X_\Lambda^H}\Omega = d\Lambda^H \otimes \Omega$.*

La definición no depende de la elección de Ω: si $\tilde{\Omega}$ es otra forma de volumen entonces $\tilde{\Omega} = f\Omega$, donde f es una función que nunca se anula, se tiene:

$$i_{X_\Lambda^H} f\Omega = d\Lambda^H \otimes f\Omega.$$

Como X_Λ^H es tangente a H y no se anula nunca, podemos definir la $(n-1)$-*forma modular* a lo largo de H como la $(n-1)$-forma dual $\Omega_\Lambda^H \in \Omega^{n-1}(H)$; esto es, $\Omega_\Lambda^H(X_\Lambda^H) = 1$. Si escogemos Y un campo de vectores sobre H que sea transversal a H, la forma modular a lo largo de H viene dada por

$$\Omega_\Lambda^H = (-1)^{n-1} \frac{1}{d_Y \Lambda^H \otimes \Omega} j^* i_Y \Omega,$$

donde $j\colon H \hookrightarrow M$ es la inclusión. Esta expresión es independiente de Y.

La $(n-1)$-forma modular a lo largo de H no se anula nunca, por lo que define una orientación en H.

Es evidente que cualquier elemento de entre $d\Lambda^H$, X_Λ^H y Ω_Λ^H, determina a los otros dos.

Vamos a relacionar las definiciones anteriores con la conocida noción de clase modular en una variedad de Poisson. Para cualquier estructura de Nambu de grado r en una variedad orientable existe una generalización natural de la clase modular [**30**], que pasamos a recordar. De nuevo fijamos una forma de volumen Ω en M. Para cualesquiera $n-1$ funciones $f_1, \ldots, f_{n-1}$ en M podemos calcular la divergencia de su campo de vectores hamiltoniano:

$$(f_1, \ldots, f_{n-1}) \mapsto \operatorname{div}^\Omega(X_{f_1,\ldots,f_{n-1}}) \equiv \frac{1}{\Omega} \mathcal{L}_{X_{f_1,\ldots,f_{n-1}}} \Omega.$$

La expresión anterior define un campo de $(n-1)$-vectores $\mathcal{M}_\Lambda^\Omega$ en M. Si $\tilde{\Omega} = g\Omega$ es otra forma de volumen, para una función g que nunca se anula, se tiene

$$\mathcal{M}_\Lambda^{\tilde{\Omega}} = \mathcal{M}_\Lambda^\Omega + X_g,$$

donde X_g es el campo de $(n-1)$-vectores

$$X_g(f_1, \ldots, f_{n-1}) = \{f_1, \ldots, f_{n-1}, g\}.$$

Es posible introducir determinados grupos de cohomología para eliminar esta ambigüedad de modo que la clase de cohomología $[\mathcal{M}_\Lambda^\Omega]$ esté bien definida y sea independiente de Ω. Esta clase es la llamada *clase modular* de la estructura de Nambu y es la obstrucción a la existencia de una forma de volumen en M invariante por todos los automorfismos hamiltonianos.

Cada forma de volumen Ω determina un campo modular de $(n-1)$-vectores $\mathcal{M}_\Lambda^\Omega$ que representa la clase modular y que dependerá de Ω. Sin embargo, en los puntos singulares todos los campos modulares tienen el mismo valor (véase **[30]**).

El campo modular de $(n-1)$-vectores X_Λ^H a lo largo de H de la definición 3.2 no es sino la restricción a H de cualquier campo modular. En nuestro caso tiene además la propiedad adicional de no anularse en ningún punto y de ser tangente a H.

4. Caracterización local de la estructura de Nambu

En esta sección estudiaremos el comportamiento local de una estructura de Nambu genérica $\Lambda \in \mathfrak{X}^n(M)$ en un entorno de su lugar de ceros. Mostraremos que el germen de Λ en una componente conexa H de su lugar de ceros está determinado, salvo isotopía, por los periodos modulares (que definimos más abajo).

Como la derivada intrínseca es functorial se concluye inmediatamente que

Lema 4.1. *Dadas dos estructuras de Nambu genéricas Λ_1 y Λ_2 con lugares de ceros $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ respectivamente y un difeomorfismo de estructuras de Nambu ψ: $(M,\Lambda_1) \longrightarrow (M,\Lambda_2)$, entonces*

$$\psi_* X_{\Lambda_1}^{\mathcal{H}_1} = X_{\Lambda_2}^{\mathcal{H}_2}, \ y \ \ \psi_*\Omega_{\Lambda_1}^{\mathcal{H}_1} = \Omega_{\Lambda_2}^{\mathcal{H}_2}.$$

Por tanto, se sigue que una condición necesaria para que dicha difeomorfismo de estructuras exista es que las clases de cohomología $[\Omega_{\Lambda_2}^{\mathcal{H}_2}]$ y $[\Omega_{\Lambda_1}^{\mathcal{H}_1}]$ se correspondan la una a la otra.

Recordamos que dada una estructura de Nambu genérica Λ, cada componente H de su lugar de ceros $\mathcal{H}$ tiene una orientación inducida por Λ. Por tanto una clase de $H_{dR}^{n-1}(H)$ está totalmente determinada por su valor en el ciclo fundamental H.

Definición 4.2. *El periodo modular T_Λ^H de la componente H del lugar de ceros de Λ es*

$$T_\Lambda^H \equiv \int_H \Omega_\Lambda^H > 0.$$

De hecho este número positivo determina la estructura de Nambu, salvo isotopía, en un entorno de H. Para probar esta afirmación recordamos el siguiente resultado clásico referido a la clasificación de formas de volumen, una de cuyas versiones hemos empleado de modo extensivo en el capítulo anterior.

Lema 4.3. *(Moser,* [45]*) Sea M una variedad orientable cerrada, Ω_1 y Ω_2 dos formas de volumen en M. Si $[\Omega_1] = [\Omega_2] \in H^{top}(M)$, entonces existe* *un difeomorfismo isotópico a la identidad que envía* Ω_1 *a* Ω_2. *Es más, lo podemos escoger para que sea la identidad en el cierre del complemento del cerrado donde ambas formas de volumen coinciden.*

El citado resultado se adapta fácilmente a formas de volumen en variedades compactas con frontera no vacía que coinciden en entornos de la frontera.

Ahora ya podemos probar el resultado principal de esta sección.

Proposición 4.4. *Sean* Λ_1 *y* Λ_2 *estructuras de Nambu genéricas en* M *que comparten una componente* H *en su lugar de ceros, y para la que los periodos modulares coinciden:* $T^H_{\Lambda_1} = T^H_{\Lambda_2}$. *Entonces existe un difeomorfismo* $\varphi : M \to M$ *isotópico a la identidad y entornos* U_1 *y* U_2 *de* H, *tal que* φ *envía* (U_1, Λ_1) *a* (U_2, Λ_2).

PRUEBA. En primer lugar usamos el lema de Moser para construir un difeomorfismo $\phi : M \to M$ isotópico a la identidad que preserva H (como conjunto) y envía $\Omega^H_{\Lambda_1}$ a $\Omega^H_{\Lambda_2}$. Luego podemos asumir de entrada que $\Omega^H_{\Lambda_1} = \Omega^H_{\Lambda_2}$, y el problema se reduce al correspondiente de linealización global.

Fijemos un collar $U = [-1, 1] \times H$ de la hipersuperficie H, con coordenada transversal r. Denotando a la estructura de Poisson mediante Λ, definimos $\Lambda_0 = (-1)^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \wedge X^H_\Lambda$. Podemos escribir $\Lambda = f\Lambda_0$ para alguna $f \in C^\infty(U)$; la linealización de Λ es $\Lambda_1 = r\Lambda_0$. Buscamos un cambio de coordenadas que sólo reparametriza la coordenada radial:

$$\phi\colon U \to U, \qquad (r, x) \mapsto (g(r, x), x),$$

y satisface $\phi_* f\Lambda_0 = r\Lambda_0$. Obtenemos una e.d.o. para g cuyas soluciones son $g(x, r) = ke^{\int \frac{1}{f} dr}$, con $k \in \mathbb{R}$. Como f se anula a orden 1 a lo largo de la dirección radial, esta e.d.o. tiene una familia uniparamétrica de soluciones diferenciables que fijan H y definen difeomorfismos (para $k \neq 0$) en un collar de H. Eligiendo una solución con $k > 0$ se obtiene el cambio de coordenadas deseado. $\square$

Observación 4.5: La existencia de una familia uniparamétrica de soluciones para la ecuación anterior refleja el hecho de que para cualquier estructura lineal $cr\frac{\partial}{\partial r} \wedge X^H_\Lambda$, el reescalamiento de la coordenada radial es una transformación canónica. Obsérvese también que la reflexión a lo largo de H es una transformación canónica invirtiendo la orientación del entorno tubular. Como estamos interesados en transformaciones isotópicas a la identidad (y por tanto preservando la orientación de entorno) nuestra elección de g arriba es con $k > 0$.

5. Descripción global de las estructuras de Nambu

Una condición previa evidente para la existencia de un difeomorfismo entre dos variedades de Nambu (con estructuras genéricas) es que haya un difeomorfismo de las variedades enviando el lugar de ceros de una de las estructuras al de la otra, y preservando las orientaciones inducidas. Asumiendo que esta condición se cumple nuestro problema es el de transformar una estructura genérica Λ_1 en otra estructura Λ_2, con lugar de ceros orientado común $\mathcal{H} = \bigcup_{i\in I} H^i$.

En primer lugar y tal y como vimos en la sección anterior, si los periodos modulares de cada componente coinciden, es posible encontrar collares U_1^i y U_2^i de las hipersuperficies H^i, y un difeomorfismo isotópico a la identidad φ enviando $(\mathcal{U}_1, \Lambda_1)$ a $(\mathcal{U}_2, \Lambda_2)$, donde $\mathcal{U}_j = \bigcup_{i\in I} U_j^i$.

En segundo lugar, $\mathcal{H}$ escinde M en las hojas maximales de ambas estructuras. Las restricciones de las estructuras de Nambu a cada una de estas componentes definen formas de volumen; los volúmenes son infinitos luego no tiene sentido pedir que coincidan. En su lugar, se puede intentar definir las razones de los volúmenes de las diferentes componentes, que son finitas; esto da lugar a dificultades de cómputo, así que lo que hacemos es observar que para una componente H del lugar de ceros, una forma de volumen Ω definida en un entorno de H y la forma de volumen Λ^{-1} definen orientaciones en el complemento de H que coinciden a un lado de H y difieren al otro. Dada cualquier función $h \in C^\infty(M)$ anulándose linealmente en las componentes de $\mathcal{H}$ (su grafo es transversal a la sección cero y se anula exactamente en $\mathcal{H}$), definimos $M^\epsilon(h) = f^{-1}(\mathbb{R} - (-\epsilon, \epsilon))$, con $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño como para que $M^\epsilon(h)$ contenga al complemento de la unión de los collares de los H^i. Se define también

$$V_\Lambda^\epsilon(h) = \int_{M^\epsilon(h)} \Lambda^{-1}.$$

Aquí Λ^{-1} denota la forma de volumen dual a Λ, y para integrar usamos la orientación dada en M.

La siguiente definición generaliza la dada en [**51**] para el caso de variedades de Poisson de dimensión 2.

Definición 5.1. *El volumen regularizado Liouville de Λ se define como*

$$V_\Lambda = \lim_{\epsilon\to 0} V_\Lambda^\epsilon(h),$$

donde h es cualquier función anulándose linealmente en $\mathcal{H}$.

Es necesario comprobar que el límite existe y es finito y que no depende de la elección de la función h. En realidad, tan sólo tenemos que probar la independencia en la elección de función, pues si esto se cumple podemos usar una función que coincida localmente con la coordenada radial en la que el campo de n-vectores es lineal. Para esta función la existencia del límite (finito) es trivial.

Para comprobar la independencia de la elección de h, fijamos coordenadas (r, x) en un entorno de cada componente H tal que $\Lambda = (-1)^{n-1} r \frac{\partial}{\partial r} \wedge X_\Lambda^H$, y consideramos dos casos:

1. Asumamos que $h(r,x) = g(x)r$, con $g(x) \neq 0$ para todo $x \in H$. La diferencia $V_\Lambda^\epsilon(h) - V_\Lambda^\epsilon(r)$ se anula para todo $\epsilon > 0$. El motivo es que en cada collar tenemos la medida producto, y la integral se obtiene haciendo la media (la integral) sobre las regiones abiertas de H donde $g < 1$ y $g > 1$, de las integrales de una la función impar $\pm\frac{1}{r}$ sobre dos intervalos que son simétricos con respecto al origen y no lo contienen.
2. Asumamos ahora que h se anula linealmente en $\mathcal{H}$. Entonces, $h - \frac{\partial h}{\partial r}(0,x)r$ se anula en la dirección radial hasta al menos orden 2 en los puntos de H. La compacidad de H implica que para todo $x \in H$ y todo $\epsilon > 0$, existen constantes k_1 y k_2 tal que el valor absoluto $V_\Lambda^\epsilon(h) - V_\Lambda^\epsilon(\frac{\partial h}{\partial r}(0,x)r)$ está acotado por la media sobre H de la integral de la función $\pm\frac{1}{r}$ sobre los segmentos $[-b_\epsilon, -a_\epsilon] \cup [a_\epsilon, b_\epsilon]$, donde $a_\epsilon > k_1\epsilon$ y $b_\epsilon - a_\epsilon < k_2\epsilon^2$. Por tanto, existe una constante k (independiente de x y r) tal que la integral sobre los segmentos en el radio por x está acotada por $k\epsilon$; esto hace que la integral total tenga valor absoluto menor que $k\epsilon T_\Lambda^H$. Así pues, cuando $\epsilon \to 0$ la diferencia se anula.

Los periodos modulares y el volumen regularizado determinan la estructura de Nambu:

Teorema 5.2. *Para $j = 1,2$, sean M_j variedades compactas orientadas con estructuras de Nambu genéricas Λ_j y lugar de ceros $\mathcal{H}_j = \bigcup_{i\in I} H_j^i$. Asumamos que existe un difeomorfismo ψ que envía $(M_1, \mathcal{H}_1)$ a $(M_2, \mathcal{H}_2)$ preservando las orientaciones inducidas en el lugar de ceros. Entonces existe un isomorfismo entre las dos estructuras de Nambu isotópico a ψ, si y solamente si las siguientes condiciones se cumplen:*

i. *Los periodos modulares coinciden, i.e., $T_{\Lambda_1}^{H_1^i} = T_{\Lambda_2}^{\psi H_1^i}$, $\forall i \in I$,*
ii. *Los volúmenes regularizados coinciden, i.e., $V_{\Lambda_1} = \varepsilon V_{\Lambda_2}$, donde $\varepsilon = 1$ si ψ preserva la orientación y $\varepsilon = -1$ si invierte las orientaciones de los M_i.*

PRUEBA. Ya sabemos que si los periodos modulares de cada componente coinciden es posible encontrar collares U_1^i y U_2^i de las hipersuperficies H^i, y un difeomorfismo isotópico a la identidad φ que envía $(\mathcal{U}_1, \Lambda_1)$ a $(\mathcal{U}_2, \Lambda_2)$, donde $\mathcal{U}_j = \bigcup_{i\in I} U_j^i$.

$\mathcal{H}$ escinde M en las hojas maximales de ambas estructuras, cuya área con respecto a cualquiera de las formas duales Λ_i^{-1} es infinita. Para cada hoja L seleccionamos una hipersuperficie H^{io} en su frontera y reducimos adecuadamente U_1^{io} o U_2^{io} (recordemos que hay transformaciones canónicas que lo hacen) tal que podemos encontrar subvariedades compactas $W_j \subset L$ que son el resultado de vaciar en L el lado correspondiente del collar de radio digamos $\frac{1}{2}$ (podemos tomar el radio original igual a 1), verificando: (i) el Λ_1^{-1}-volumen de W_1 coincide con el Λ_2^{-1}-volumen de W_2, y (ii) φ envía W_1 a W_2.

Finalmente, aplicamos el teorema de Moser para concluir la existencia de un difeomorfismo isotópico a la identidad que hace coincidir las estructuras de Nambu en L.

Observemos que cuando modificamos el tamaño de $U_1^{i_0}$, estamos cambiando el volumen tanto de $L - \mathcal{U}_1$ como de $L' - \mathcal{U}_1$, donde L y L' son las hojas cuya frontera contiene a H^{i_0}. Se deduce que podemos hacer coincidir los campos de n-vectores, además de en los collares de $\mathcal{H}$, en todas las hojas maximales salvo posiblemente una. Para comprobar esto último tomamos el grafo dual a la escisión definida por $\mathcal{H}$, en el que cada vértice representa una hoja maximal y un segmento uniendo dos vértices representa la hipersuperficie en su frontera común. Este grafo es en realidad un árbol (es contráctil); fijamos un vértice v_0 en el árbol y consideramos la distancia (en el sentido de grafos) con respecto a v_0. Podemos entonces proceder en etapas, donde en cada una de ellas consideramos los vértices a la misma distancia, y empezando por los más lejanos. Para todos los vértices de la primera etapa, i.e., para las correspondientes hojas maximales, aplicamos el razonamiento del párrafo anterior a la hipersuperficie que representa el único segmento que lo alcanza (no hay ciclos en el árbol). A continuación borramos todos estos vértices y los segmentos incidentes y aplicamos el mismos razonamiento al subárbol resultante. Continuamos este proceso hasta llegar a los vértices a distancia 1. Podemos usar todos los segmentos menos uno y quedarán una hipersuperficie que separa las dos últimas hojas maximales. El hecho de que los volúmenes regularizados coinciden implica que para una determinada elección de collar las áreas de los correspondientes subconjuntos de las hojas coinciden, con lo que finalizamos la prueba. □

El conjunto de estructuras genéricas de Nambu soporta una acción de $\mathrm{Diff}_0(M)$ (resp. $\mathrm{Diff}^+(M)$). Su espacio de órbitas tiene tantas componentes conexas como clases de isotopía (respectivamente clases de difeomorfismo orientado) de hipersuperficies orientadas $\mathcal{H} = \bigcup_{i\in I} H^i$. El teorema 5.2 da una parametrización explícita de cada componente conexa del correspondiente espacio de moduli.

6. Cohomología de Nambu

Hay diferentes teorías de cohomología que se pueden asociar a una variedad de Nambu (véase [**30, 44**]). Aquí estaremos interesados en la cohomología asociada al complejo

$$0 \longrightarrow \wedge^{n-1} C^\infty(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^n(M) \longrightarrow 0,$$

donde la primera aplicación es $f_1 \wedge \cdots \wedge f_{n-1} \mapsto X_{f_1,\dots,f_{n-1}}$, mientras que la segunda es $X \mapsto \mathcal{L}_X \Lambda$. Nótese que los grupos de cohomología asociados tiene un significado geométrico sencillo:

- $H^0_\Lambda(M)$ es el espacio de Casimires de la estructura de Nambu.

- $H^1_\Lambda(M)$ es el espacio de automorfismo externos de la estructura de Nambu.
- $H^2_\Lambda(M)$ es el espacio de deformaciones infinitesimales de la estructura de Nambu.

Los cómputos cohomológicos para *gérmenes* de estructuras de Nambu definidas por cuasi-polinomios (funciones anulándose en el origen cuyo ideal asociado tiene codimensión finita) han sido hechos por Monnier en [44]. Aquí estamos interesados en estructuras de Nambu *globales* con el tipo de singularidad más simple. Los cómputos que vamos a llevar a cabo se pueden entender como una versión infinitesimal del teorema de clasificación; en particular, $H^2_\Lambda(M)$ resultará ser el espacio tangente en el punto (en la clase) $[\Lambda]$ en el espacio de moduli de estructuras de Nambu genéricas.

El resultado principal de esta sección es el siguiente

Teorema 6.1. *Sea Λ una estructura genérica de Nambu en una variedad cerrada orientada M con lugar de anulación $\mathcal{H} = \bigcup_{i\in I} H^i$. El grupo $H^2_\Lambda(M)$ tiene dimensión $\#I + 1$ y un conjunto de generadores viene dado por*

$$\beta_1(-1)^{n-1} r\frac{\partial}{\partial r} \wedge X^{H^1}_\Lambda, \dots, \beta_{\#I}(-1)^{n-1} r\frac{\partial}{\partial r} \wedge X^{H^{\#I}}_\Lambda,\ \Omega,$$

donde Ω es una forma de volumen, y cada β_i es una función de corte con soporte en un collar de la hipersuperficie H^i.

Se puede dar una descripción geométrica del isomorfismo $H^2_\Lambda(M) \simeq \mathbb{R}^{\#I+1}$ del siguiente modo: cada $\Theta \in \mathfrak{X}^n(M)$ es cohomólogo a un campo de n-vectores cuyo lugar de anulación contiene a $\mathcal{H}$ y es genérico en un entorno de $\mathcal{H}$. De este modo se puede escribir $[\Theta] = [g\Lambda]$ donde g es una función diferenciable que toma el valor constante c_i en el collar de cada U^i. El isomorfismo es

$$[\Theta] \longmapsto \left(\frac{T^{H^1}_\Lambda}{T^{H^1}_\Theta}, \dots, \frac{T^{H^{\#I}}_\Lambda}{T^{H^{\#I}}_\Theta}, V^{\mathcal{H},\Lambda}_\Theta \right),$$

donde:

(a) $\frac{T^{H^i}_\Lambda}{T^{H^i}_\Theta} = c_i$,

(b) $V^{\mathcal{H},\Lambda}_\Theta$ es la integral regularizada de $g\frac{1}{\Lambda}$.

El resto de esta sección la dedicamos a la prueba del citado teorema, que se basa en un argumento del estilo "Mayer-Vietoris": en primer lugar se computan los grupos de cohomología en los collares y a continuación se pegan los resultados usando la información acerca de los automorfismos infinitesimales de la estructura en esos entornos.

6.1. Cómputo de $H^2_\Lambda(U)$

Fijemos $H \subset \mathcal{H}$ y $U = (-1, 1) \times H$ un collar.

Proposición 6.2. *$H^2_\Lambda(U) \simeq \mathbb{R}$ y un generador es la linealización $(-1)^{n-1} r\frac{\partial}{\partial r} \wedge X^H_\Lambda$.*

PRUEBA. Cualquier campo de vectores X se puede escribir como $X = A\frac{\partial}{\partial r} + X_H$, donde $A \in C^\infty(U)$, $X_H \in (-1,1) \times TH$. Definiendo $\Lambda_0 = (-1)^{n-1}\frac{\partial}{\partial r} \wedge X^H_\Lambda$, se tiene:

$$\begin{aligned} L_X\Lambda &= A\Lambda_0 + rL_X\Lambda_0 = \\ &= (A - r\frac{\partial A}{\partial r})\Lambda_0 + (-1)^{n-1} r\frac{\partial}{\partial r} \wedge L_{X_H}X^H_\Lambda = \\ &= (A - r\frac{\partial A}{\partial r} + r\mathrm{div}^{\Omega^H_\Lambda}(X_H))\Lambda_0, \end{aligned}$$

donde $\mathrm{div}^{\Omega^H_\Lambda}(X_H)$ es la divergencia de X_H con respecto a Ω^H_Λ.

Queremos mostrar que cualquier campo de n-vectores $f\Lambda_0$ en U es equivalente a uno lineal. Comenzamos por hacer que se anule en el origen (de la coordenada r) añadiendo $L_{-f\frac{\partial}{\partial r}}\Lambda$ (de modo que se convierte en $r\frac{\partial f}{\partial r}\Lambda_0$), y continuamos llamándolo $f\Lambda_0$. Asumamos por un momento que se anula al menos hasta orden 2 en el origen. Podríamos entonces escribir $f = r^2 g$. Obsérvese que $L_{-r\int gdr}\Lambda = (-r\int gdr + r\int gdr + r^2 g)\Lambda_0 = f\Lambda_0$. Escribiendo $f = r\hat{f}$, nos fijamos en el valor $c = \int_{\{0\}\times H} \hat{f}\Omega^H_\Lambda \in \mathbb{R}$, y vemos que siempre se puede encontrar $Y \in \mathfrak{X}(H)$ tal que $\hat{f}_{|H} + \mathrm{div}^{\Omega^H_\Lambda}(Y) = c$. El campo de n-vectores $\Lambda_1 = f\Lambda_0 + L_Y\Lambda$ tiene a $c\Lambda_0$ como parte lineal constante en H. Finalmente, $\Lambda_1 - cr\Lambda_0$ se anula en H hasta orden al menos 2, por lo que es un coborde.

Aun es necesario demostrar que no existen perturbaciones que envíen una estructura lineal a otra con un periodo relativo diferente (la constante c arriba). Esto equivale a probar que la ecuación $E_c \equiv A - r\frac{\partial A}{\partial r} - r\mathrm{div}^{\Omega^H_\Lambda}(X_H) = cr$ no tiene soluciones para $c = 1$. De hecho también necesitamos estudiar la ecuación E_0 de los automorfismos infinitesimales de Nambu.

Lema 6.3. *La ecuación E_1 no tiene soluciones y $Z^1_\Lambda(U)$, el espacio de soluciones de E_0, se puede identificar con el siguiente espacio vectorial:*

$$Z^1_\Lambda(U) \equiv < r\frac{\partial}{\partial r}, X_H \in (-1,1) \times TH |\ div^{\Omega^H_\Lambda}(X_H(0)) = 0 >$$

PRUEBA DEL LEMA 6.3. En las ecuaciones E_c el término $\mathrm{div}^{\Omega^H_\Lambda}(X_H)$ se puede escribir como ψ_r, donde ψ_r, $r \in (-1,1)$ es una familia diferenciable de funciones en $C^\infty(H)$ que satisfacen $\int_H \psi_r \Omega^H_\Lambda = 0$, $\forall r \in (-1,1)$. Podemos pensar en ellas como en datos dados en las ecuaciones. Así, las soluciones de E_1 se pueden escribir de modo explícito en la forma:

$$A = kr + r\int \frac{\psi_r - 1}{r} dr, k \in \mathbb{R}$$

Cualquier solución ha de ser una continuación diferenciable de la expresión anterior, pero ésta no puede existir. En efecto, como ψ_0 tiene integral nula, es posible encontrar un punto x en H para el que $\psi_0(x) = 0$. Por tanto, en un pequeño segmento $[-\epsilon,\epsilon]\times\{x\}$ la función de variable real $r\int\frac{\psi_r(x)-1}{r}dr$ es, salvo una función diferenciable, $r\ln r$ (ni tan siquiera C^1). $\square$

Esto finaliza el cómputo de $H^2_\Lambda(U)$. $\square$

Observación 6.4: En cuanto a E_0 sus soluciones son de la forma

$$A = kr + r\int\frac{\psi_r}{r}dr,$$

que serán diferenciables si y sólo si $\psi_0 = 0$, o equivalentemente si el correspondiente campo de vectores $X_H(0)$ tiene divergencia nula con respecto a Ω^H_Λ. Luego podemos identificar el espacio de soluciones Z^1_Λ con:

$$Z^1_\Lambda \equiv < r\frac{\partial}{\partial r}, X_H \in (-1,1)\times TH |\, \mathrm{div}^{\Omega^H_\Lambda}(X_H(0)) = 0 >$$

6.2. De $H^2_\Lambda(U)$ a $H^2_\Lambda(M)$

El paso que resta es pegar toda la información local. Acabamos de demostrar que en la misma coordenada radial en la que Λ se linealiza podemos encontrar un representante Θ de la clase de cohomología tal que $\Theta_{|U^i} = c_i(-1)^{n-1}r\frac{\partial}{\partial r}\wedge X^{H^i}_\Lambda = c_i\Lambda$, donde el periodo relativo $\frac{T^{H^i}_\Lambda}{T^{H^i}_\Theta}$ es c_i, pudiendo muy bien ser cero. En particular para una estructura que no se anule nunca todos los invariantes locales se anulan, pues sin más que mirar a su n-forma dual es evidente que al no anularse podemos empujar su grafo hacia abajo (o hacia arriba) hacia la sección $\mathbf{0}$, para lograr que se anule en los U^i. Podemos llevar a cabo dicha operación sin que cambie el volumen (lo hacemos aleatoriamente y luego multiplicamos por la razón entre los volúmenes resultantes).

También hemos visto que podemos limitarnos a trabajar con cobordes X para los que $X_{|U^i}$ es una solución de E_0 en las coordenadas radiales. Es necesario probar que el volumen global regularizado con respecto a Λ está bien definido, lo que equivale a demostrar que el volumen regularizado de $L_X\Lambda$ se anula siempre que X sea un automorfismo infinitesimal de Λ en U^i.

Si h es una función que coincide con la coordenada radial en cada U^i, $M^r(h) = M - \bigcup_{i\in I}(r,r)\times H^i$. Se tiene:

$$\int_{M^r(h)} L_X\Lambda = \int_{M^r(h)} di_X\frac{1}{\Lambda} = \pm\sum_{i\in I}\left(\int_{\{r\}\times H^i} i_X\frac{1}{\Lambda} - \int_{\{-r\}\times H^i} i_X\frac{1}{\Lambda}\right)$$

Y para una componente fija H y $X = kr + r\int\frac{\mathrm{div}^{\Omega^H_\Lambda}(X_H)}{r}dr\frac{\partial}{\partial r} + X_H$, la función

$\Delta(r) = \int_{\{r\}\times H} i_X\frac{1}{\Lambda}$ vale:

$$\Delta(r) = (-1)^{n-1}\int_{\{r\}\times H}\frac{1}{r}\left(kr + r\int\frac{\mathrm{div}^{\Omega_\Lambda^H}(X_H)}{r}dr\right)\Omega_\Lambda^H = \quad (6.14)$$

$$= (-1)^{n-1}\int_{\{r\}\times H}\left(k + \int\frac{\mathrm{div}^{\Omega_\Lambda^H}(X_H)}{r}dr\right)\Omega_\Lambda^H \quad (6.15)$$

Dado que $\mathrm{div}^{\Omega_\Lambda^H}(X_H)(0) = 0$, la fórmula anterior define una función diferenciable para todo $r \in [-1,1]$. Su derivada se calcula fácilmente:

$$\frac{d\Delta}{dr} = (-1)^{n-1}\frac{d}{dr}\int_{\{r\}\times H}(k + \int\frac{\mathrm{div}^{\Omega_\Lambda^H}(X_H)}{r}dr)\Omega_\Lambda^H =$$

$$= (-1)^{n-1}\int_{\{r\}\times H}\frac{\mathrm{div}^{\Omega_\Lambda^H}(X_H)}{r}\Omega_\Lambda^H = 0$$

La anulación está clara para $r \neq 0$, y se sigue por continuidad. Luego $\Delta(r)$ es constante y $V_\Theta^{\mathcal{H},\Lambda}$ está bien definida.

Tan sólo resta probar que dos campos n-vectores Θ_1 y Θ_2 con igual linealización y volumen regularizado están en la misma clase. Su diferencia $\tilde{\Theta}$ se anula en un entorno de la frontera de $M - \mathring{\mathcal{U}}$; la forma $\frac{1}{\Lambda}(\tilde{\Theta}) \cdot \frac{1}{\Lambda}$ tiene soporte compacto (contrayendo los collares si es necesario) e integral nula, por lo que se puede encontrar un campo de vectores Y con soporte compacto cuya divergencia es $\frac{1}{\Lambda}(\tilde{\Theta}) \cdot \frac{1}{\Lambda}$. Se sigue que $L_{\tilde{Y}}\Lambda = \tilde{\Theta}$, donde $\tilde{Y}$ extiende a Y trivialmente.

La afirmación acerca de la base de $H^2_\Lambda(M)$ se sigue sin dificultad.

6.3. Algunos comentarios sobre $H^1_\Lambda(M)$ y $H^0_\Lambda(M)$

Centraremos nuestra atención en lo que ocurre en un collar U. Ahí necesitamos la descripción de los campos hamiltonianos para llegar a algunas conclusiones. Dada $f \in C^\infty(U)$ descomponemos en cada punto su derivada $df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + d_H f$. El espacio vectorial $B^1_\Lambda(U)$ de campos hamiltonianos se puede describir:

$$B^1_\Lambda(U) = \{(-1)^{n-1} r X_\Lambda^H(d_H f_1, \ldots, d_H f_{n-1})\frac{\partial}{\partial r} +$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-i} r\frac{\partial f_j}{\partial r} X_\Lambda^H(d_H f_1, \ldots, \hat{d_H f_j}, \ldots, d_H f_{n-1})\},$$

con $f_1, \ldots, f_{n-1} \in C^\infty(U)$.

Luego todos los campos hamiltonianos se anulan necesariamente a lo largo de H. Para cada H^i denotemos mediante $\mathfrak{X}_{\mathrm{free}}(H_i)$ al espacio vectorial de campos de vectores con divergencia nula con respecto a la forma de volumen $\Omega_\Lambda^{H^i}$. Denotando momentáneamente por r_i a la correspondiente coordenada radial, se tiene el siguiente

Corolario 6.5.

(1) $< r_i \frac{\partial}{\partial r_i} > \oplus \mathfrak{X}_{free}(H^i) \subset H^1_\Lambda(U^i)$.
(2) $\bigoplus_{i \in I}(< \phi_i \cdot r_i \frac{\partial}{\partial r_i} > \oplus \phi_i \cdot \mathfrak{X}_{free}(H^i)) \subset H^1_\Lambda(M)$, *donde* ϕ_i *son funciones de corte con soporte en los collares. Para* $n \geq 3$ *este espacio es claramente de dimensión infinita.*

PRUEBA. La afirmación sobre los vectores con divergencia nula es evidente. En cuanto al tamaño del espacio simplemente observamos que se identifica con las $(n-2)$-formas cerradas en H^i que contiene a las exactas. De la descripción de $B^1_\Lambda(U)$ vemos que el coeficiente de $r\frac{\partial}{\partial r}$ contiene el factor $X_\Lambda(d_H f_1, \ldots, d_H f_{n-1})$, que no puede ser no nulo en cada $\{r\} \times H$ por compacidad. □

Observamos que el caso $n = 2$ resulta ser muy especial, y de hecho $H^1_\Lambda((-1,1) \times S^1)$ se calcula sin dificultad.

Corolario 6.6. $H^1_\Lambda((-1,1) \times S^1)$ *está generado por el campo modular de vectores* $X^{S^1}_\Lambda$ *y por* $r\frac{\partial}{\partial r}$.

PRUEBA. $X^{S^1}_\Lambda$ trivializa TS^1 de modo que $X_H = gX^{S^1}_\Lambda$, $g \in C^\infty((-1,1) \times S^1)$. Se comprueba que

$$B^1_\Lambda = \{-rX^{S^1}_\Lambda(d_{S^1}f)\frac{\partial}{\partial r} - r\frac{\partial f}{\partial r}X^{S^1}_\Lambda \mid f \in C^\infty((-1,1) \times S^1)\}$$

$$Z^1_\Lambda = \left\{ \left(kr + r\int \frac{X^{S^1}_\Lambda(d_{S^1}g)}{r} dr \right) \frac{\partial}{\partial r} + gX^{S^1}_\Lambda \right\},$$

donde $g \in C^\infty((-1,1) \times S^1)$, $g_{|S^1} = k_1$, $k, k_1 \in \mathbb{R}$.

Así pues, $gX^{S^1}_\Lambda - k_1 X^{S^1}_\Lambda$ es un cociclo; basta tomar $f = -\int \frac{g-k_1}{r} dr$. □

En general la determinación de $H^1_\Lambda(U)$ parece ser un problema muy difícil.

Del mismo modo parece que no es razonable esperar poder calcular $H^0_\Lambda(M)$. Por ejemplo, para $n = 3$ vemos que $X_{f,g} = 0$ implica que df y dg han de ser proporcionales. Si asumimos que f es una función genérica, g tiene que ser constante en sus superficies de nivel. Luego hay tantas elecciones para g como el tamaño del anillo de funciones del espacio de hojas M^3/f. Ésta es una variedad de dimensión 1 que puede ser muy diferente para un mismo M^3 (se puede construir a partir de una descomposición en asas para M^3 mirando como cambia el π_0 al añadir asas).

7. Unas familias especiales de estructuras de Nambu

Como hemos visto, el problema de la clasificación de estructuras genéricas de Nambu en una variedad cerrada dada incluye el de la clasificación de ciertas disposiciones de hipersuperficies (aquellas disposiciones que provienen de ceros de una función). Para M^n se puede considerar el árbol dual a $(M, \mathcal{H})$ y poner un signo más si la orientación del n-tensor en la hoja maximal correspondiente coincide con la de M, y un menos en caso contrario. Dar los signos equivale a dar las orientaciones de las hipersuperficies.

Para S^2, Radko **[51]** define $\mathcal{G}_k(S^2)$ como el conjunto de estructuras genéricas de Poisson en S^2 con lugar de ceros formado por k curvas.

Un árbol con signos y pesos se define como un árbol al que se le ha asignado un signo más o menos a cada vértice, de modo que vértices adyacentes tienen signo opuesto; cada segmento se pesa con un número positivo (el periodo modular), y se asigna un número real a todo el grafo (el volumen regularizado). En el citado artículo se prueba el siguiente:

Teorema 7.1 ([**51**]). *El conjunto $\mathcal{G}_k(S^2)$ coincide, salvo isomorfismos preservando la orientación, con las clases de isomorfismo de árboles con signos y pesos con $k+1$ vértices (el isomorfismo ha de preservar el número real que se le asigna al grafo).*

El resultado se basa en el hecho de que hay una correspondencia uno a uno entre las disposiciones de k círculos en S^2 (de hecho salvo isotopía) y las clases de isomorfismo de árboles con $k+1$ vértices (nótese que a un árbol se le pueden poner signos de dos maneras). Es posible encontrar una isotopía entre dos disposiciones con igual grafo porque, salvo isotopía, el circulo se sumerge en S^2 de modo único descomponiendo S^2 en dos discos, y este resultado admite una conocida generalización a dimensiones superiores.

Teorema 7.2 (Teorema de Schoenflies diferenciable). *Cualquier inmersión diferenciable (sin auto-intersecciones) $j\colon S^{n-1} \hookrightarrow S^n$ es la frontera de una bola n-dimensional y por tanto escinde la esfera en dos bolas n-dimensionales. En particular, es isotópica a la inmersión estándar en la que S^{n-1} se sumerge en $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} = S^n$ como la frontera de la bola euclídea de radio 1.*

También es cierto para inmersiones en $\mathbb{R}^n$.

Una consecuencia evidente es el siguiente resultado:

Lema 7.3. *Hay una correspondencia uno a uno entre disposiciones de k $(n-1)$-esferas en S^n, salvo isotopía, y clases de isomorfismo de árboles con $k+1$-vértices.*

Definición 7.4. *Definamos $\mathcal{G}_k(S^n)$ como el conjunto de estructuras genéricas de Nambu en S^n cuyo lugar de anulación está constituido por k esferas.*

Demos a S^n la orientación usual, de modo que podemos poner signos a los árboles duales. Acabamos de probar la siguiente

Proposición 7.5. *El conjunto $\mathcal{G}_k(S^n)$ es, salvo isotopía, el mismo que el de clases de equivalencia de árboles con $k+1$ vértices con signos y pesos.*

Conclusiones y futuras líneas de investigación

En esta tesis hemos estudiado diferentes aspectos de tres clases de geometrías de carácter topológico, estructuras 2-calibradas, estructuras de Poisson y estructuras de Nambu. Los resultados de mayor interes han sido aquellos probados para variedades calibradas compactas. Para ellas hemos demostrado la existencia de una geometría aproximadamente holomorfa que da multitud de construcciones topológicas compatibles con la estructura calibrada: pinceles de Lefschetz, ciclos calibrados, subvariedades determinantales e inmersiones en $\mathbb{CP}^m$ sin autointersecciones y transversales a determinadas foliaciones holomorfas de $\mathbb{CP}^m$.

Se ha analizado la geometría local de las variedades calibradas, probando la existencia de cartas de Darboux y secciones de referencia localizadas de fibrados de línea muy amplios. También se han clarificado algunos aspectos de la propia teoría aproximadamente holomorfa para variedades simplécticas (o casi-complejas pares), como los relacionados con la modificación de la estructura casi-compleja de los fibrados de r-jets pseudo-holomorfos, y la construcción de los fibrados no lineales de r-jets de aplicaciones a espacios proyectivos y sus correspondientes propiedades.

Además de los resultados indicados y matizados de manera detallada en el texto, hay una serie de preguntas y potenciales aplicaciones que surgen de modo natural, principalmente asociadas al estudio de las foliaciones calibradas.

En primer lugar, y cuando la hojas son variedades complejas, es lógico preguntarse si es posible deformar las secciones A.H. a secciones holomorfas a lo largo de las hojas. La diferencia con el caso par, en la que esto si es posible es la ausencia en principio de un operador que detecte secciones holomorfas (como el asociado a la métrica Kähler en el caso de variedades pares) con las propiedades de elipticidad requeridas.

Más concretamente, podemos particularizar a las foliaciones taut en 3-variedades. Para ellas, toda estructura casi-compleja es integrable con lo que la pregunta anterior cobra aun más sentido. Es más, los resultados de E. Ghys muestran que es posible desarrollar una teoría significativa para secciones holomorfas a lo largo de las hojas (véase **[21]**). En particular, E. Ghys prueba resultados de existencia de aplicaciones holomorfas a $\mathbb{CP}^2$ que son inmersiones locales en cada hoja, que es exactamente la misma clase de resultados que nosotros podemos lograr pero con aplicaciones A.H. Sin duda, el estudio profundo de los métodos de Ghys puede arrojar luz sobre como lograr dicha perturbación a secciones genuinamente holomorfas, pero usando los métodos locales de trabajo (básicamente empleando secciones de referencia holomorfas) desarrollados en esta memoria.

Creemos que también es necesario un estudio detallado de los aspectos combinatoriales de los pinceles de Lefschetz para foliaciones taut, pues estas estructuras son herramientas potenciales para el estudio de la topología de foliaciones taut. Sin ser muy concretos, la imagen del enlace de puntos singulares da lugar a una estructura particular de CW-complejo en S^2. Su imagen inversa define una superficie con singularidades (la estructura de estas autointersecciones se sigue de los modelos locales). Toda la información de la estructura taut está contenida esencialmente en esta superficie singular foliada (pues su complemento son toros sólidos foliados trivialmente), luego una caracterización "combinatorial" de estas superficies sería de gran utilidad. Dado que toda foliación taut admite estructuras de pincel de Lefschetz compatibles, podríamos ser capaces de reconstruir no sólo la foliación, sino la foliación con una estructura de pincel compatible.

Existen otra clase de aplicaciones que se obtienen de la teoría desarrollada para las que es suficiente partir de variedades de cuasi-contacto compactas, esto es, variedades M^{2n+1} dotadas de 2-formas ω cerradas y no degeneradas (y para las que luego se escoge cualquier distribución transversa al núcleo de ω como elemento auxiliar). Para ello se construyen aplicaciones n-genéricas $\phi_k\colon M \to \mathbb{CP}^n$. Por definición, esta es la dimensión menor para la que no hay puntos base con lo que las aplicaciónes están definidas en todo M. El pullback de ω_{FS} está en la clase de cohomología de $k\omega$, y podemos considerarla como una elección de 2-forma en dicha clase con propiedades dinámicas interesantes. $\phi_k^*\omega_{FS}$ degenera a lo largo de una subvariedad estratificada Σ_k, que es el lugar de degeneración de ϕ_k. Aún así hay que tener en cuenta que la interpretación geométrica sólo es cierta en el sentido aproximado. Para lograr las interpretaciones usuales es necesario que la aplicación sea holomorfa en un entorno de los correspondientes estratos, lo cual es posible cuando n es 1 ó 2 (por ejemplo, para $n = 2$ hay una 3-variedad $\Sigma_1(\phi_k)$, en la que el rango cae a 2, y dentro de ésta un enlace de puntos $\Sigma_{1,1}(\phi_k)$, en los que el núcleo es aproximadamente tangente a $\Sigma_1(\phi_k)$). Esta nueva 2-forma da lugar a un sistema dinámico (en principio no diferenciable) definido como sigue: consideramos X_k el campo de vectores en el núcleo de $\phi_k^*\omega_{FS}$, con coorientación positiva y cuya componente a lo largo del núcleo de $k\omega$ vale 1 en la métrica g_k. Este campo sólo está definido fuera Σ_k. Para dar una definición global multiplicamos por la única función $g \in C^\infty(M)$ tal que $g(k\omega^n) = \phi_k^*\omega_{FS}^n$ sobre $\mathcal{F}$. La función g tiende a cero al aproximarse a Σ_k, lo que da una extensión por ceros de gX_k. En principio dicha extensión no es necesariamente diferenciable. Si partimos de una 3-variedad con una foliación taut entonces el campo definido sí es diferenciable. Todavía en dimensión 3 y para una distribución D arbitraria dominada por ω, se comprueba que aunque el campo gX_k no es necesariamente diferenciable, es posible reescalarlo (usando cartas de Darboux que recubran el divisor Σ_k y pegando con funciones meseta) para definir un campo de vectores diferenciable y proporcional a X_k en el que no hemos añadido puntos fijos. Es de esperar que existan reescalamientos de gX_k para dimensiones arbitrarias que den lugar a campos diferenciables (y con los mismos puntos fijos). Es evidente que la existencia de formas normales nos facilitaría dicha tarea y daría una descripción del flujo cerca Σ_k. Sería necesario un estudio cualitativo por medios alternativos de dicho flujo en la proximidad de Σ_k. Lo interesante de este flujo es que las trayectorias son o bien fijas, o bien tienden a Σ_k (tanto cuando el tiempo tiende a ∞ como a $-\infty$), o bien son periódicas. En dimensión 3 está no es sino una información obtenida de una estructura de pincel de Lefschetz (en realidad más debil, pues el pincel también da información sobre el espacio órbitas). Por supuesto, si en vez de comenzar con una estructura de cuasi-contacto empezamos por ejemplo con una foliación calibrada, ademas se tiene que tanto las órbitas no fijas como el lugar de degeneración son transversos a la foliación.

Obsérvese también que aunque todas las aplicaciones de la teoría A.H. han sido obtenidas para variedades calibradas, de modo deliberado hemos desarrollado la teoría relativa de modo que sea aplicable no sólo para simplectizaciones, sino en situaciones más generales.

Es más o menos evidente que la teoría desarrollada tiene como corolarios inmediatos la existencia de construcciones relativas para subvariedades simplécticas o calibradas de variedades simplécticas compactas. Pongamos el siguiente ejemplo: dada (M,ω) una variedad simpléctica compacta (de tipo entero) cualquier hipersuperficie orientada Q con un campo de vectores transverso X definido en un entorno de Q define de modo canónico una estructura calibrada en Q (la distribución D es el núcleo de $i_X\omega$). Podemos por ejemplo construir pinceles de Lefschetz relativos para la cuarteta (M,ω,Q,X), es decir, pinceles de Lefschetz para (M,ω) que restringen a pinceles de Lefschetz en $(Q,D,\omega_{|Q})$ (en realidad sólo hay modelos para los puntos base en $A\cap X$ como puntos base de la estructura de pincel para M). Este caso es especialmente interesante cuando $L_X\omega = q\omega$, $q\in\mathbb{Z}$, pues Q será o bien una hipersuperficie de contacto, o bien Poisson (en este último caso un fibrado simpléctico por ser $[\omega]$ entera). Nótese que la variedad simpléctica puede tener frontera no vacía, y la hipersuperficie en cuestion ser su frontera. El ejemplo obvio que tenemos en mente es el de los llenados simplécticos ("symplectic fillings") de variedades de contacto.

También existen estructuras de pincel relativo para ternas (M,ω,N), donde N es cualquier subvariedad simpléctica.

Pasando a los contenidos del capítulo segundo, se ha definido una construcción de cirugía para variedades de Poisson, mostrándose como corolario de estas construcciones que el grupo fundamental no obstruye la existencia de estructuras de Poisson. Siguiendo con el espíritu más topológico de este capítulo, una cuestión que creemos sería interesante investigar es la siguiente: cuando partimos de variedades de Poisson integrables en el sentido de R. L. Fernandes y M. Crainic **[11]** (por ejemplo de foliaciones calibradas de tipo entero) y la correspondiente suma conexa normal también lo es (ésta a su vez también es otra pregunta interesante; en cualquier caso, sabemos que para ciertas cirugías calibradas el resultado es también una variedad calibrada y por tanto integrable), ¿corresponde la construcción del grupoide de Lie (que es una variedad abierta) a alguna clase de cirugía en los respectivos grupoides simplécticos? Nótese que para abordar esta cuestión contamos como arma principal la descripción –más o menos manejable– del grupoide simpléctico como un cociente de clases de A-caminos (véase **[11]** para las definiciones correspondientes). Lo curioso de la cuestión es que tanto la cirugía de Poisson como la simpléctica, ocurren a lo largo de subvariedades de codimensión 2. Si existe una construcción del grupoide mediante alguna cirugía "simpléctica" asociada a los grupoides asociados a los sumandos y a la subvariedad fibrada, esta operación habrá de ser necesariamente nueva por emplear como nexo una "subvariedad" de codimensión 4.

Por último, en el tercer capítulo hemos dado una clasificación de las estructuras de Nambu genéricas en variedades orientables. Creemos que en lo relativo a la clasificación de estructuras geométricas sin invariantes locales (o con invariantes fácilmente descriptibles, como es el caso de las estructuras de Nambu genéricas), las cuestiones más interesantes se centran de nuevo en las estructuras de Poisson (incluso en superficies), pero con singularidades más complejas. De hecho, no sólo es intersante la clasificación de las propias estructuras, sino de otras clases de objetos asociados a ellas. Por ejemplo, incluso para las estructuras de Poisson genéricas, sería interesante describir el espacio de conexiones contravariantes (véase **[18]**), y más explicitamente, la existencia de estructuras geométicas en dicho espacio (recordemos que el moduli de conexiones contravariantes para estructuras simplécticas en superficies tiene una estructura simpléctica, o de Poisson cuando la frontera es no vacía).

APÉNDICE A

El problema $\bar{\partial}$ de Neumann con parámetros

El problema $\bar{\partial}$ de Neumann, en principio para dominios $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ con frontera diferenciable, plantea la existencia de soluciones y la regularidad de las mismas para la ecuación líneal en derivadas parciales

$$\bar{\partial}\beta = \alpha, \tag{A.1}$$

donde α es una (p,q) forma –en principio de cuadrado integrable– y que necesariamente ha de ser $\bar{\partial}$ cerrada.

La referencia básica que seguiremos en esté apéndice –de entre la muchas existentes– es el capítulo 7 de [**35**].

Una primera observación es que si β es una solución y λ es una $(p,q-1)$-forma con coeficientes holomorfos, $\beta+\lambda$ es otra solución. Por tanto para obtener una teoría razonable es necesario elegir de modo canónico una "buena" solución. Una elección lógica es si hay solución, tomar aquella que es ortogonal a las funciones holomorfas en Ω.

Enunciaremos un teorema de existencia, en el que el control de la solución en la frontera de Ω dependerá de la geometría de la misma. Para ello recordamos que un dominio cerrado Ω es *estrictamente pseudo-convexo* si su forma de Levi es definida positiva en todos los puntos (definición 7.4.3 en [**35**]). Igualmente, $H_s^{(p,q)}(\Omega)$ denota el espacio de Hilbert de (p,q)-formas con coeficientes en el correspondiente espacio de Sobolev, y $\wedge^{p,q}(\Omega)$ las (p,q)-formas con coeficientes diferenciables (también en la frontera). El resultado fundamental que vamos a usar es el siguiente.

Teorema A.1. *(Teorema 7.9.14 en [**35**]) Sea $q \geq 1$, $\alpha \in H_0^{(p,q)}(\Omega)$, donde Ω es estrictamente pseudo-convexo. Entonces existe una única $\beta \in H_0^{(p,q)}(\Omega)$ tal que β es ortogonal al núcleo de $\bar{\partial}$ y $\bar{\partial}\beta = \alpha$. Si $\alpha \in \wedge^{p,q}(\Omega)$ entonces $\beta \in \wedge^{p,q-1}(\Omega)$ y se tiene la siguiente estimación fundamental:*

$$|\beta|_s \leq A_s|\alpha|_s, \; \forall \alpha \in \wedge^{p,q}(\Omega), \tag{A.2}$$

donde A_s no depende de α, y $|\cdot|_s$ es la correspondiente norma Sobolev. Llamaremos a β la solución canónica.

Es necesario resaltar que uno de los puntos más delicados es el análisis de ganacia de regularidad en la frontera, diferente a la del interior ("hipoeliptici-cidad").

Pretendemos, a partir de este teorema, deducir mediante métodos muy elementales una versión con parámetros del mismo para datos diferenciables y con estimaciones para normas C^h.

Para nuestra aplicación principal Ω es B^{2n}, la bola unidad –que es evidentemente estrictamente pseudo-convexa– y no necesitamos toda la potencia del resultado anterior.

En efecto, a partir de $\phi(z,\theta) \in C^\infty(B^{2n}(0,1+\epsilon)\times S^1)$, queremos construir otra función $\phi' \in C^\infty(B^{2n}(0,1-\epsilon)\times S^1)$ que sea holomorfa para cada θ fijo y cuya distancia a ϕ en norma C^h venga controlada por la de $\bar{\partial}\phi$. Para ello queremos resolver la ecuación A.1 con $\alpha_\theta = \bar{\partial}\phi(z,\theta)$, y emplear la *única solución* β_θ dada por A.1 para definir $\phi'(z,\theta) = \phi(z,\theta) - \beta_\theta(z)$. Es más, como no necesitamos que ϕ' esté definida en el mismo dominio que ϕ, es suficiente con tomar $\alpha_\theta = f\partial\phi$, donde f es una función de corte de modo que α_θ tenga soporte compacto en el interior de B^{2n}, con lo que no necesitamos el delicado análisis de lo que ocurre en la frontera.

En cualquier caso, veremos que a partir del teorema A.1 se deduce el siguiente corolario.

Corolario A.2. *Sea (P,g) una variedad compacta riemanniana de dimensión u, $q \geq 1$ y Ω un dominio de $\mathbb{C}^n$ estrictamente pseudo-convexo y compacto. Sea $\alpha(z,t) \in \wedge^{p,q}(\Omega\times M)$ verificando $\bar{\partial}\alpha_t = 0$. Entonces existe una única $\beta \in \wedge^{p,q-1}(\Omega\times M)$ tal que β_t es ortogonal al núcleo de $\bar{\partial}$ y $\bar{\partial}\beta_t = \alpha_t$. Además, existen constantes B_j, $\forall j \in \mathbb{N}$ que no dependen de α tal que*

$$|\beta|_{C^j} \leq B_j|\alpha|_{C^j}, \tag{A.3}$$

donde $|\cdot|_{C^j}$ es la suma de las normas del supremo para la forma y sus j primeras derivadas covariantes. Usamos la métrica producto con factores la euclídea y g, y las derivadas covariantes se toman usando la correspondiente conexión de Levi-Civita.

PRUEBA. Definimos $\beta(z,t)$ de modo que β_t sea la solución canónica dada por el teorema A.1 con dato α_t. Simplemente observamos que la unicidad de la construcción hace que obtengamos una función bien definida.

Veremos que una vez probada la diferenciabilidad de β las cotas de A.3 se siguen de modo obvio.

Observamos que basta con probar el teorema siendo P un abierto de $\mathbb{R}^u$ (con coordenadas $t_1,...,t_u$).

Sea $(z',t') \in \Omega\times\mathbb{R}^u$ un punto cualquiera. Para probar continuidad de β aplicamos la desigualdad triangular para escribir

$$|\beta(z,t)-\beta(z',t')| \leq |\beta(z,t)-\beta(z',t)| + |\beta(z',t)-\beta(z',t')|.$$

De la continuidad de β_t garantizada por el teorema $A.1$ se tiene que la continuidad de β en (z',t') se seguiría de probar que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{z\in\Omega}|\beta(z,t)-\beta(z,t')| \leq \epsilon, \text{ si } |t-t'| \leq \delta. \tag{A.4}$$

Definamos para cada $t \in \mathbb{R}^u$, $\gamma_t(z) := \beta_t(z) - \beta_{t'}(z)$. Es inmediato verificar que $\gamma_t\colon \Omega \to \mathbb{C}$ es ortogonal a las funciones holomorfas –por ser diferencia de funciones en dicho espacio vectorial– y que $\bar{\partial}\gamma_t = \alpha_t - \alpha_{t'}$. En consecuencia γ_t es la solución canónica con dato $\alpha_t - \alpha_{t'}$, por lo que podemos aplicar las estimaciones fundamentales. En particular, y recordando que $|\cdot|_s$ denotan a las correspondientes cotas Sobolev, para $s > n$ se tiene:

$$|\gamma_t|_{C^0} \leq K_s|\gamma_t|_{j+n} \leq K_sA_s|\alpha_t - \alpha_{t'}|_s \leq K_sA_sV_s|\alpha_t - \alpha_{t'}|_{C^{j+n}}. \qquad \text{(A.5)}$$

La primera desigualdad se sigue del teorema de inmersión de Sobolev, la segunda del teorema A.1 y la tercera es obvia. Por último, $\alpha_t - \alpha_{t'}$, junto con sus derivadas (en las coordenadas de $\mathbb{C}^n$) se anulan para t'. La compacidad de Ω junto con la diferenciabilidad de α hacen que A.4 se satisfaga.

El siguiente paso es probar que $\frac{\partial\beta}{\partial t_m}$, $1 \leq m \leq u$, existe y es continua. El candidato obvio es la solución canónica con dato $\frac{\partial\alpha}{\partial t_m}$. Llamemos $\dot{\beta}$ a dicha solución. Fijemos un $t' \in \mathbb{R}^u$ y consideremos la función $\zeta(z,t) := \beta_{t'} + \int_{t'_m}^{t_m} \dot{\beta}(z, t_1, ..., t_{m-1}, v, t_{m+1}, ..., t_u)dv$. Si demostramos que ζ coincide con β entonces por el teorema fundamental del cálculo $\frac{\partial\beta}{\partial t_m} = \dot{\beta}$. Como $\dot{\beta}$ es a su vez una solución canónica, como acabamos de ver será continua. Todo esto demostraría que β es C^1 (la existencia y continuidad de las derivadas parciales a lo largo de las direcciones de $\mathbb{C}^n$ están garantizadas por el teorema A.1).

En primer lugar como $\dot{\beta}$ es contínua, $\bar{\partial}\int_{t'_m}^{t_m} \dot{\beta}dv = \int_{t'_m}^{t_m} \bar{\partial}\dot{\beta}(z,v)dv$. Por tanto, $\bar{\partial}\zeta = \alpha_{t'} + \int_{t'_m}^{t_m} \frac{\partial\alpha}{\partial t}dv = \alpha_t(z)$. Además, si F es una función holomorfa cualquiera,

$$\int_\Omega (\int_{t'_m}^{t_m} \dot{\beta}dv)\bar{F}dw = \int_{t'_m}^{t_m} (\int_\Omega \dot{\beta}\bar{F}dw)dv = 0,$$

pues las integrales conmutan por la continuidad de $\dot{\beta}$ y F.

Luego ζ coincide con β por ser ambas la solución canónica con dato α.

En lo que se refiere a las derivadas parciales segundas, aquellas que sólo involucran las variables $z_i, \bar{z}_j$ existen y son contínuas por el teorema A.1. La existencia y continuidad de $\frac{\partial^2\beta}{\partial z_i \partial t_m}$, $\frac{\partial^2\beta}{\partial \bar{z}_j \partial t_m}$ y $\frac{\partial^2\beta}{\partial t_q \partial t_m}$, con $1 \leq i,j \leq n$, $1 \leq q,m \leq u$, se siguen de que $\frac{\partial\beta}{\partial t_m}$ es una solución canónica y según acabamos de demostrary es C^1. La continuidad de las derivadas parciales $\frac{\partial^2\beta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}$, $\frac{\partial^2\beta}{\partial \bar{z}_j \partial z_i}$ es consecuencia de la desigualdad correspondiente a A.5, pero partiendo de la norma $|\cdot|_{C^2}$ en el término más a la izquierda.

La última posibilidad es una derivada del tipo $\frac{\partial^2\beta}{\partial t_m \partial z_i}$ ó $\frac{\partial^2\beta}{\partial t_m \partial \bar{z}_j}$, cuya existencia y continuidad se sigue del lema de Schwarz. Recordemos que en su forma más débil nos asegura que si tanto $\frac{\partial^2\beta}{\partial z_i \partial t_m}$ (resp. $\frac{\partial^2\beta}{\partial \bar{z}_j \partial t_m}$) como $\frac{\partial\beta}{\partial z_i}$ (resp. $\frac{\partial\beta}{\partial \bar{z}_j}$) existen y son contínuas, entonces $\frac{\partial^2\beta}{\partial t_m \partial z_i}$ (resp. $\frac{\partial^2\beta}{\partial t_m \partial \bar{z}_j}$) existe, es contínua y coincide con $\frac{\partial^2\beta}{\partial z_i \partial t_m}$ (resp. $\frac{\partial^2\beta}{\partial \bar{z}_j \partial t_m}$). El único ingrediente necesario es la continuidad de $\frac{\partial\beta}{\partial z_i}$ (resp. $\frac{\partial\beta}{\partial \bar{z}_j}$), y esto se prueba de la desigualdad A.5 para normas $|\cdot|_{C^2}$.

Una vez que hemos demostrado que β es C^2, la diferenciabilidad a órdenes superiores se prueba por inducción, usando la conmutatividad de las derivadas parciales. En efecto, si asumimos que β es C^h, y tenemos una derivada parcial de orden $h+1$, ésta puede ser de tres tipos. El primero es áquel en que no se deriva con respecto a ninguna variable t_m, y la existencia y continuidad se sigue del teorema A.1 y la desigualdad correspondiente a A.5 pero partiendo de normas $|\cdot|_{C^{h+1}}$. En segundo lugar tenemos aquellas derivadas parciales para las que se deriva con respecto a una variable t_m antes de llegar al orden $n+1$. Podemos poner dicha derivada parcial en primer lugar, y usar que $\frac{\partial\beta}{\partial t_m}$ es de clase C^h por inducción. La tercera clase de derivadas parciales son aquellas en que aparece una única variable t_m y lo hace en último lugar. De nuevo podemos aplicar el lema de Schwarz a la correspondiente derivada de orden $h-1$ de β.

En consecuencia deducimos que la solución canónica $\beta\colon \Omega \times \mathbb{R}^u \to \mathbb{C}$ es diferenciable.

La existencia de las cotas B_j de modo que A.3 se cumple es obvia, pues siempre que tengamos una derivada parcial de orden j la podremos escribir de la forma $\frac{\partial^j \beta}{\partial z^a \partial \bar{z}^b \partial t^c}$, con a, b, c representando ciertos multiíndices. Basta ahora con considerar el problema $\bar{\partial}$ para $\frac{\partial \alpha}{\partial t^c}$, y aplicar las cotas del teorema A.1 junto con las provenientes de la inmersión de Sobolev apropiada para obtener el resultado buscado.

$\square$

Bibliografía

[1] V. I. Arnol'd, A. Varchenko, S. M. Gusein-Zade, *Singularities of smooth mappings.* Monographs in Mathematics, Birkhäuser (1982).

[2] D. Auroux, *Asymptotically holomorphic families of symplectic submanifolds.* Geom. Func. Anal., **7** (1997), 971–995.

[3] D. Auroux, *Symplectic* 4*-manifolds as branched coverings of* $\mathbb{CP}^2$. Invent. Math., **139** (2000), 551–602.

[4] D. Auroux, *Estimated transversality in symplectic geometry and projective maps.* Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), 1–30, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001.

[5] D. Auroux, *A remark about Donaldson's construction of symplectic submanifolds.* Preprint math.DG/0204286.

[6] M. Bertelson, *Foliations associated to regular Poisson structures.* Commun. Contemp. Math. **3** (2001), no. 3, 441–456.

[7] J. M. Boardman, *Singularities of differentiable maps.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **33** (1967) 21–57.

[8] D. Calegari, *Leafwise smoothing laminations.* Algebr. Geom. Topol. **1** (2001), 579-585 (electronic).

[9] O. Calvo, V. Muñoz, F. Presas, *Codimension one symplectic foliations.* Preprint math.SG/0111259.

[10] M. Crainic, R. L. Fernandes, *Integrability of Lie brackets.* math.DG/0105033; aparecerá en Ann. of Maths.

[11] M. Crainic, R. L. Fernandes, *Integrability of Poisson brackets.* math.DG/0210152.

[12] S. K. Donaldson, *Symplectic submanifolds and almost-complex geometry.* J. Diff. Geom., **44** (1996), 666–705.

[13] S. K. Donaldson, *Lefschetz fibrations in symplectic geometry.* Doc. Math. Extra Vol. ICM 98, II (1998) 309–314.

[14] S. K. Donaldson, *Lefschetz fibrations in Symplectic Geometry.* J. Diff. Geom., **53** (1999), no. 2, 205–236.

[15] S. K. Donaldson, P. B. Kronheimer, *The geometry of four-manifolds.* Clarendon Press, Oxford (1990).

[16] J. P. Dufour and N. T. Zung, *Linearization of Nambu structures.* Compositio Math., **117** (1999), no. 1, 77–98.

[17] Y. Eliashberg, W. Thurston, *Confoliations.* University Lecture Series, 13 (1998) American Mathematical Society, Providence, RI.

[18] R. L. Fernandes, *Connections in Poisson geometry. I. Holonomy and invariants.* J. Diff. Geom. **54** (2000), no. 2, 303–365.

[19] D. Gabai, *Foliations and the topology of* 3*-manifolds. II.* J. Diff. Geom. **26** (1987), no. 3, 461–478.

[20] D. Gabai, *Foliations and the topology of* 3*-manifolds. III.* J. Diff. Geom. **26** (1987), no. 3, 479–536.

[21] E. Ghys, *Gauss-Bonnet theorem for* 2*-dimensional foliations.* J. Funct. Anal. **77** (1988), no. 1, 51–59.

[22] E. Ghys, *L'invariant de Godbillon-Vey.* Astérisque (1989), 177–178.

[23] E. Giroux, J. P. Mohsen. *En preparación.*

[24] R. E. Gompf, *A new construction of symplectic manifolds.* Ann. of Maths., **142** (1994), 527-595.

[25] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry.* Wiley-Interscience (1994).

[26] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves on symplectic manifolds.* Invent. Math., **82** (1985), 307–47.

[27] M. Gromov, *Partial differential relations.* Springer, Berlin (1996).

[28] M. Gromov, *Soft and hard symplectic geometry.* In proceedings of the ICM at Berkely 1986, vol. 1, 81–98. Am. Math. Soc. Providence RI (1987).

[29] R. Harvey, H. B. Lawson, Jr., *Calibrated foliations (foliations and mass-minimizing currents).* Amer. J. Math. **104** (1982), no. 3, 607–633.

[30] R. Ibáñez, M. de León, B. López, J. C. Marrero and E. Padrón, *Duality and modular class of a Nambu structure.* J. Phys. A, **34** (2001), no. 17, 3623–3650.

[31] A. Ibort, D. Martínez-Torres, *A new construction of Poisson manifolds.* Aparecerá en Journal of Symplectic Geometry.

[32] A. Ibort, D. Martínez-Torres, F. Presas, *On the construction of contact submanifolds with prescribed topology.* J. Diff. Geom. **56** (2000), no. 2, 235–283.

[33] R.C. Kirby, *The topology of 4-manifolds.* Lect. Notes Maths., **1384**. Springer-Verlag (1991).

[34] F. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* Math. Ann., **43** (1893), 63–100.

[35] S. Krantz, *Partial differential equations and complex analysis.* Studies in Advanced Mathematics, CRC Press (1992)

[36] W. B. Lickorish, *A foliation for 3-manifolds.* Ann. Math. **82** (1965), 414–420.

[37] D. Martínez-Torres *Global classification of generic multi-vector fields of top degree.* Preprint math.DG/0209374.

[38] D. Martínez-Torres, V. Muñoz, F. Presas, *Open book decompositions for almost contact manifolds.* Aparecerá en Proceedings of the X Fall Workshop on Geometry and Physics (Miraflores de la Sierra 2002), Publ. R. Soc. Mat. Esp.

[39] J. N. Mather *How to stratify mappings and jet spaces.* Singularités d'Applications Différentiables (Plans-sur-Bex 1975), Lecture Notes in Math **535**, Springer (1976), 128–176.

[40] D. McDuff, *Examples of simply-connected non K'ahlerian manifolds.* J. Diff. Geom, **20** (1984), 267-277.

[41] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to symplectic topology.* Clarendon Press, Oxford (1995).

[42] J. Milnor *Morse theory.* Annals of Mathematics Studies **51**, Princeton University Press (1963).

[43] J. P. Mohsen, Tesis. École Norm. Sup. Lyon (2001).

[44] P. Monnier, *Computation of Nambu-Poisson cohomologies.* Int. J. Math. Math. Sci. **26** (2001), no. 2, 65–81.

[45] J. Moser, *On the volume elements on a manifold.* Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965) 286–294.

[46] V. Muñoz, F. Presas, I. Sols, *Almost holomorphic embeddings in Grassmannians with applications to singular symplectic submanifolds.* J. Reine Angew. Math. **547** (2002), 149–189.

[47] V. Muñoz, F. Presas, I. Sols, *Asymptotically holomorphic embeddings of contact manifolds in projective spaces.* Global differential geometry: the mathematical legacy of Alfred Gray (Bilbao, 2000), 386–390, Contemp. Math., **288**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[48] Y. Nambu, *Generalized Hamiltonian mechanics.* Phys. Rev. D, **7** (1973), 2405–2412.

[49] J. F. Plante, *Foliations with measure preserving holonomy. Ann. of Math.* (2) **102** (1975), no. 2, 327–361.

[50] F. Presas, *Lefschetz type pencils on contact manifolds.* Asian J. Math., **6** (2002), no. 2, 277–302.

[51] O. Radko, *A classification of generic Poisson structures on a compact oriented surface.* Preprint math.SG/0110304.

[52] D. Sullivan, *Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds.* Invent. Math. **36** (1976), 225–255.

[53] L. Takhtajan, *On foundations of the generalized Nambu mechanics.* Comm. Math. Phys. **160** (1994), 295–315.

[54] I. Vaisman, *Lectures on Poisson manifolds.* Progress in Mathematics, **118**, Birkhäuser (1994).

[55] I. Vaisman, *A survey on Nambu-Poisson brackets.* Acta Math. Univ. Comenian (N.S.) **68** (1999), no. 2, 213–241.

[56] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds.* J. Diff. Geom., **18** (1983), 523–57.

[57] A. Weinstein, *The modular automorphism group of a Poisson manifold.* J. Geom. Phys., **23** (1997), 379–394.